Opstilling af differentialligningsmodel til beregning af provision ved salg af energianlæg.

af John V. Petersen

Vi skal finde en funktion, som beskriver provisionen y(x) ved salg af energianlæg til salgsprisen *x*.
Der skal gælde, at provisonen skal stige i takt med at salgsprisen stiger. Men stigningen skal gradvis aftage sådan, at provisionen når en øvre grænse, hvor den stort set ikke stiger mere. Stigningens aftagen skal være eksponentielt aftagende.

Prisen for disse anlæg er i størrelsesordenen 10 millioner € til 1000 millioner €
For at gøre tallene enklere at arbejde med anvender vi enhederne:
10^7 € som enhed for x. Og 10^5 € som enhed for y.
dvs. 10 millioner € = $1,0\cdot 10^7$ € , og 1000 *millioner* €= $100,0\cdot 10^7$ € ,

Nu skal vi opstille en differentialligningsmodel:
Ved en lille ændring i salgspris (x), vil provisionen y(x) = y stige lidt. Men stigningen skal blive mindre og mindre jo højere salgsprisen er. Og provisionen skal nærme sig en højeste værdi (y = m), som grænseværdi for $x \to \infty$.
Og der skal gælde, at y(0) = 0 .
Desuden er to ønskede værdisammenhænge for x og $y(x)$: $(x, y) = (2, 2)$ og $(x, y) = (6, 3.6)$
Hvilket svarer til, at $y(2\cdot 10^7\ €) = 2\cdot 10^5\ €$ og $y(6\cdot 10^7\ €) = 3.6\cdot 10^5\ €$.

model: $\dfrac{dy}{dx} = k\cdot \mathrm{e}^{-b\cdot x}$

Her bliver dy mindre og mindre , hvis $\mathrm{e}^{-b} < 1$: $\mathrm{e}^{-b} < 1 \Leftrightarrow 1 < \mathrm{e}^{b} \Leftrightarrow b > 0.$

$$\frac{dy}{dx} = k\cdot \mathrm{e}^{-b\cdot x} \quad \Leftrightarrow \quad dy = k\cdot \mathrm{e}^{-b\cdot x}\,dx$$

Vi bruger t som integrationsvariabel, for at gøre integrationen mere overskuelig.

Vi integrerer: y går fra 0 til y. Og t går fra 0 til x.

> $int\left(k\,\mathrm{e}^{-b\,t}, t = 0..x\right);$

$$-\frac{k\left(-1+\mathrm{e}^{-b\,x}\right)}{b} \tag{1}$$

dvs. $y(x) = -\dfrac{k\left(-1+\mathrm{e}^{-b\,x}\right)}{b} = \dfrac{k}{b}\cdot\left(1 - \mathrm{e}^{-b\,x}\right)$

$$y(x) = \frac{k}{b}\cdot\left(1 - \mathrm{e}^{-b\,x}\right)$$

Vi lader $x \to \infty$:

$y(x) \to \dfrac{k}{b}$ **for** $x \to \infty$

Vi sætter $\frac{k}{b} = m$. Og vi benævner $y(x) = f(x)$.

$$f(x) = m \cdot (1 - e^{-b \cdot x})$$

> $f := x \to m \cdot (1 - e^{-b \cdot x});$

$$f := x \to m\,(1 - e^{-b\,x}) \quad \mathbf{(2)}$$

Vi skal nu finde konstanter m (maksimal betaling) og b så funktionen opfylder:
$f(0) = 0$ og $f(2) = 2$ og $f(6) = 3.6$ er uafhængige og afhængige variable for denne funktion.

> $with(RealDomain) :$
> $solve(\{m \cdot (1 - e^{-b \cdot 2}) = 2, m \cdot (1 - e^{-b \cdot 6.0}) = 3.6\}, \{m, b\});$

$$\{b = 0.3224689958, m = 4.207825128\} \quad \mathbf{(3)}$$

Den endelige funktion, som opfylder ovenstående:

$$\boldsymbol{f(x) = 4.207825128 \cdot (1 - e^{-0.3224689958 \cdot x})}$$

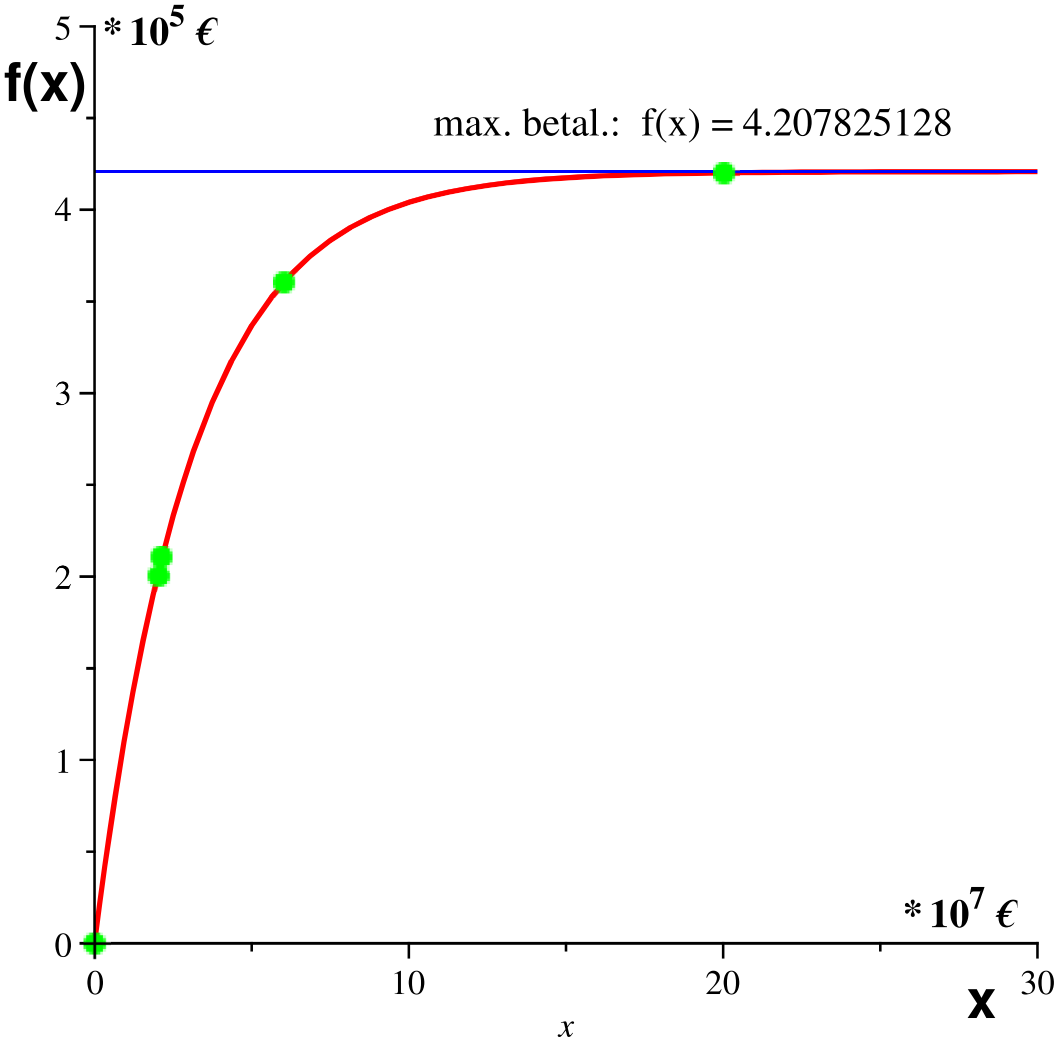
> $with(plots) :$
> $f := x \to 4.207825128 \cdot (1 - e^{-0.3224689958 \cdot x});$

$$f := x \to 4.207825128\,(1 - e^{(-1) \cdot 0.3224689958\,x}) \quad \mathbf{(4)}$$

> $g := x \to 4.207825128;$

$$g := x \to 4.207825128 \quad \mathbf{(5)}$$

> $graf := plot(f(x), x = 0..30, view = [0..30, 0..5], thickness = 2) :$
> $maxbetaling := plot(g(x), x = 0..30, view = [0..30, 0..5], color = blue) :$
> $punkter := pointplot([0, 0], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 18),$
$pointplot([2, 2], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 18),$
$pointplot([2.149500230, 2.103912564], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize$
$= 18), pointplot([6, 3.6], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 18),$
$pointplot([20, 4.201170442], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 18) :$
> $display(graf, maxbetaling, punkter);$



x	0	2	$X_{\frac{1}{2}}$	6	20
$f(x)$	0	2	2.103912564	3.6	4.201170442

> $punkter := Array([[f(0), f(2), f(2.149500230), f(6), f(20)]]);$

$$punkter := \begin{bmatrix} 0. & 2.000000000 & 2.103912564 & 3.600000001 & 4.201170442 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$X_{\frac{1}{2}}$ er den salgspris hvor $f(x) = \frac{1}{2} \cdot m$

Vi vil nu se på, hvordan provisionen nærmer sig m (den maksimale betaling).
Hvor meget mindskes differensen mellem m og den aktuelle betaling ($f(x)$), for hver enhed (10^7 €).

$$d(x) = m - f(x) = m - [m \cdot (1 - e^{-b \cdot x})] = m - m + m \cdot e^{-b \cdot x} = m \cdot e^{-b \cdot x}$$

$$d(x) = m \cdot (e^{-b})^x = m \cdot a^x \quad , \quad (e^{-0.3224689958})^x = 0.7243583896^x = a^x \quad , \quad a = 0.7243583896$$

$$d(x) = 4.207825128 \cdot 0.7243583896^x \ .$$

Vi ser, at differensen $d(x)$ mindskes med 27.56416104 % for hver enhed $\left(10^7\ €\right)$ af salgsprisen. $a = 1 + r \Leftrightarrow r = a - 1 = -0.2756416104$

Hvis vi starter fra x = 0: afstanden er $4.207825128 \cdot 10^5$ €, som vi sætter til 100 % = 1.

Det er netop funktionen $d(x) = m \cdot a^x$, hvor vi sætter $m = 1$. $d(x) = a^x$

$X_{\frac{1}{2}}$ er den salgspris hvor $d(x) = \frac{1}{2} \cdot m = \frac{1}{2} \cdot 4.207825128 \cdot 10^5$ €.

$X_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{b} = 2.149500230 \cdot 10^7\ € = 21495002.30\ €$

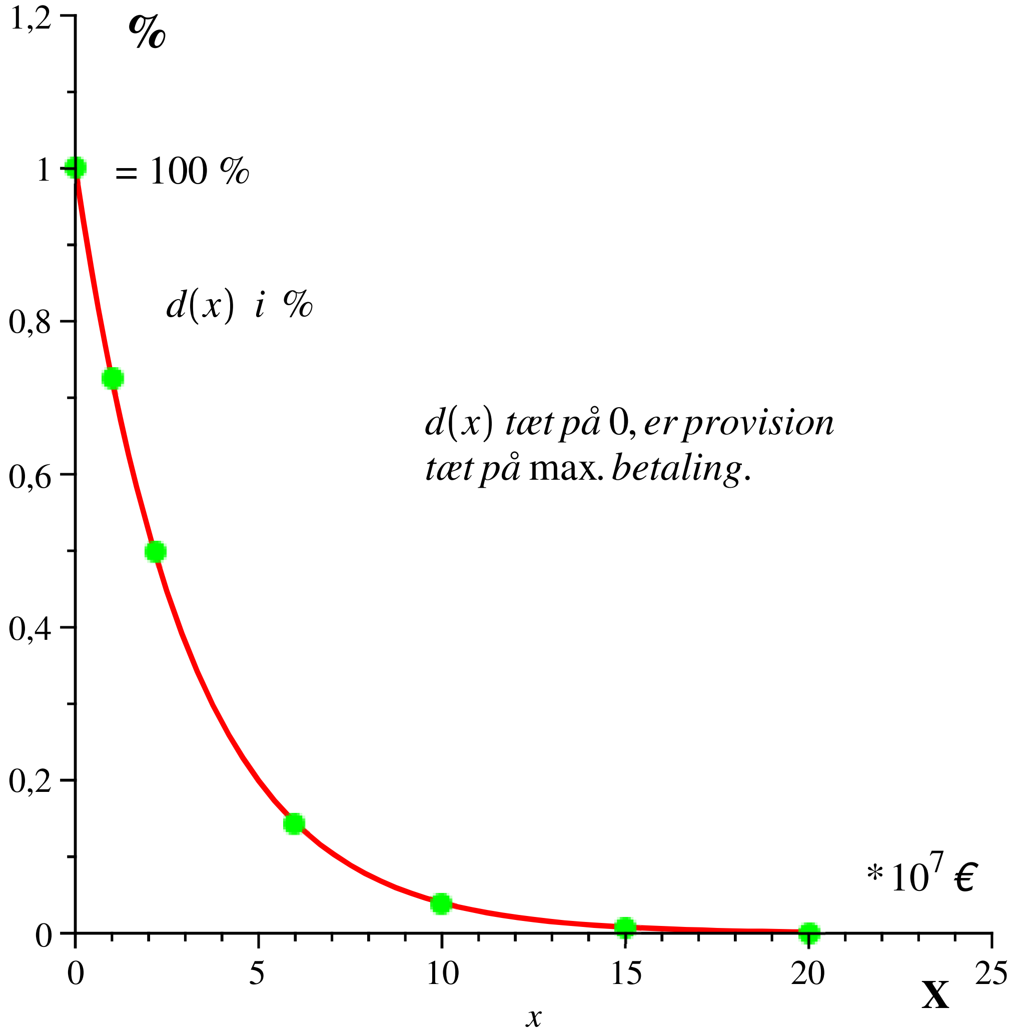
x	0	1	2.149500230	6	10	20
$d(x)$ i %	a^0	a^1	$a^{2.149500230}$	a^6	a^{10}	a^{20}
$d(x)$ i %	1	0.7243583	0.4999999	0.1444511	0.03976810	0.001581502
$d(x)$ i %	100 %	72.4358 %	50.00 %	14.4451 %	3.9768 %	0.1582 %

Herunder plotter vi grafen for $d(x)$:

```
> restart; with(plots) :
> d := x → 0.7243583896^x;
```

$$d := x \rightarrow 0.7243583896^x \tag{7}$$

```
> graf := plot(d(x), x = 0 ..20, view = [0 ..25, 0 ..1.2], thickness = 2) :
> punkter := pointplot([0, 1], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 18),
    pointplot([1, 0.7243583896], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 18),
    pointplot([2.149500230, 0.50], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 18),
    pointplot([6, 0.1444511379], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 18),
    pointplot([10, 0.03976810944], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 18),
    pointplot([15, 0.007930533755], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize
     = 18), pointplot([20, 0.001581502529], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize
     = 18) :
> display(graf, punkter);
```


1,2
%
1
= 100 %
0,8
d(x) i %
0,6
d(x) tæt på 0, er provision
tæt på max. betaling.
0,4
0,2
* 10^7 €
0
0
5
10
15
20
25
X
x