Rækkeudvikling - Inertialsystem

John V Petersen

$$f(\epsilon) \approx f(0) + \epsilon \cdot \left.\frac{d f(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon = 0}$$

$$F_t(x) = \frac{GM}{R^2}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{R}\right)^2}\right]$$

Rækkeudvikling inertialsystem

art-science-soul

Vi vil **undersøge om inertiens lov**, med tilnærmelse, **gælder i et koordinatsytem med centrum i Solen**, og faste akser i forhold til stjernerne i vores galakse. Er det et inertialsystem vi kan stole på ved udregninger, når vi ved, at Solen deltager i galaksens rotation ? (se nærmere forklaring, definition af et inertialsystem i appendiks side 7) .

Undervejs skal vi reducere en funktion og udføre rækkeudvikling, for at få et udtryk vi kan konkludere på. Det er jo netop **rækkeudviklinger, som er emnet i denne artikel**. Rækkeudviklinger er et matematisk redskab som gør, at man kan forstå komplicerede udtryk, man har regnet sig frem til, i en bestemt grænse. Man kan altså se sammenhænge mere klart og enkelt. Sammenhænge der måske ikke var til at få øje på, indse. Og man kan så bedre ræssonere udfra denne sammenhæng og dermed konkludere, indenfor de kriterier som rækkeudviklingen angiver - eksempelvis betydende cifre.

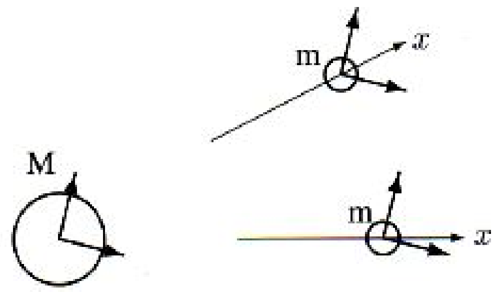

Fig. 1 Koordinatsystem (m) accelereret i forhold til inertialsystem (M).

Vi ser på fig. 1. På figuren er markeret to legemer M og m med masserne *M* og *m*. Vi antager, at *M* er så mange gange større end *m*, at der til det store legeme kan knyttes et inertialsystem med nulpunkt i det store legemes centrum. Medens det lille legeme kredser omkring det store legemes centrum på grund af deres gensidige tyngdekraftstiltrækning. Accelerationen $\boldsymbol{a}$, af det lille legeme er da ifølge Newtons II lov rettet imod centrum af det store legeme og har størrelsen

$$a = \frac{G \cdot M}{R^2} \qquad (1)$$

hvor G er gravitationskonstanten og R afstanden imellem de to legemers centre.

På fig. 1 er også indtegnet et koordinatsystem med nulpunkt i det lille legemes centrum, og akser der ikke drejer i forhold til inertialsystemet. Hvis vi vil beskrive bevægelser relativt til dette koorsinatsystem, skal vi, udover de kræfter der også er virksomme i inertialsystemet, medregne en systemkrsft (ofte kaldet en fiktiv kraft, selvom den er virkelig nok) modsat rettet $\boldsymbol{a}$ af størrelse a gange massen af det, der bevæger sig.

Tilstedeværelsen af det store legeme har derfor to samtidige konsekvenser for bevægelser af masser relativt til det lille legemes koordinatsystem. Det store legeme påvirker masserne med en tyngdetiltrækning. Og det store legeme accelerer derved det lille, således at der i dets koordinatsystem herudover virker et systemkraftfelt (beregnet udfra dette accelererede koordinatsystem).

Tidevandsfeltet fra det store legeme i det lille legemes koordinatsystem er summen af dette systemfelt og tyngdekraftsfeltet fra det store legeme. I det lille legemes massemidtpunkt er summen af disse to kraftfelter nul. Men da tyngdefeltet varierer med stedet, hvorimod systemkraftfeltet er det samme overalt, gælder det kun netop i massemidtpunktet.

På fig. 1 er indtegnet en x-koordinatakse, som går igennem de to massemidtpunkter, og har nulpunkt i det lille legemes massemidtpunkt. Langs denne x-akse er størrelsen af tidevandsfeltet $F_t(x)$, regnet positivt bort fra M:

$$F_t(x) = \frac{G\cdot M}{R^2} - \frac{G\cdot M}{(R+x)^2} =$$

$$= \frac{G\cdot M}{R^2} - \frac{G\cdot M}{R^2+2xR+x^2}$$

$$= \frac{G\cdot M}{R^2} - \frac{G\cdot M}{R^2\left(1+\frac{2\cdot x}{R}+\frac{x^2}{R^2}\right)}$$

$$= \frac{G\cdot M}{R^2} - \frac{G\cdot M}{R^2\left(1+\frac{x}{R}\right)^2}$$

$$= \frac{G\cdot M}{R^2}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{x}{R}\right)^2}\right]$$

$$\text{dvs} \quad F_t(x) = \frac{G\cdot M}{R^2}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{x}{R}\right)^2}\right] = \frac{G\cdot M}{R^2}\left[1 - \left(1+\frac{x}{R}\right)^{-2}\right] \qquad (2)$$

Her er x afstanden fra det lille legemes massemidtpunkt, regent positivt bort fra M.

Vi vil nu foretage en rækkeudvikling efter den lille størrelse $\frac{x}{R}$:

Vi vil estimere $F_t(x)$ i grænsen, hvor $\left|\frac{x}{R}\right| << 1$.

Det gør vi ved rækkeudvikling.

Det er udtrykket $\left(1+\frac{x}{R}\right)^{-2}$, som er variabelt. Det vil vi se på:

Udtrykket ovenfor er af formen $f(\epsilon) = (1+\epsilon)^{\alpha}$, (3)

hvor $|\epsilon| = \left|\frac{x}{R}\right| << 1$ og $\alpha = -2$.

For små værdier af ϵ , vil vi rækkeudvikle til første orden omkring $\epsilon = 0$.

Vi ser på Taylorrækken $f(x) \approx f(0) + f(0)' \cdot x + \cdots$

Her i notationen $f(\epsilon) \approx f(0) + \epsilon \cdot \left.\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} + \cdots$ (4)

$$\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} = \alpha \cdot (1+\epsilon)^{\alpha-1} \quad , \tag{5}$$

hvor $\left.\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \alpha$.

Vi indsætter i nu i (4) , og får $f(\epsilon) = (1+\epsilon)^{\alpha} \approx 1 + \alpha \cdot \epsilon$ (6)

dvs. $\left(1+\frac{x}{R}\right)^{-2} \approx 1 - 2 \cdot \frac{x}{R}$,

Dette udtryk indsættes i (2) $F_t(x) \approx \frac{G \cdot M}{R^2} \cdot \left[1 - \left(1 - 2 \cdot \frac{x}{R}\right)\right] = \frac{G \cdot M}{R^2} \frac{2x}{R}$

.

Vi har altså $\quad F_t(x) \approx \frac{G \cdot M}{R^2} \frac{2x}{R} \quad .$ (7)

Dette udtryk, denne funktion rummer svaret på spørgsmålet:
Gælder inertiens lov, med tilnærmelse, i et koordinatsytem med centrum i Solen, og faste akser i forhold til stjernerne i vores galakse ?

Tidevandsfeltet $F_t(x)$ er faktoren $\frac{2x}{R}$ mindre end gravitationsfeltet $\frac{G \cdot M}{R^2}$, i nærheden af det lille legeme, .

Med galaksen som det store legeme, og Solen som det lille legeme, ses tidevandsfeltet i solkoordinatsystemet i Jordens

afstand fra Solen, således at være af størrelsesordenen $\frac{2x}{R} = \frac{2 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \ m}{2.6 \cdot 10^{20} \ m} \approx 10^{-9}$.

Hvor $R = 2.6 \cdot 10^{20} \ m$, er afstanden fra galaksecentret til Solen, og $x = 1.5 \cdot 10^{11} \ m$, er

afstanden fra Solen til Jorden.

Dvs. tidevandsfeltet $F_t(x)$ i solkoordinatsystemet, er 10^{-9} gange mindre end gravitationsfeltet fra galaksen.

Faktoren 10^{-9} forklarer hvorfor et **koordinatsystem med centrum i Solen**, i praksis kan regnes for et inertialsystem.

Vi har set, hvordan vi kan lade **Solen være nulpunkt i et koordinatsystem,** så det **i praksis kan opfattes som et inertialsystem.** På samme måde kan vi lade **Jorden være nulpunkt i et koordinatsystem**, så det i praksis kan opfattes som et inertialsystem.

Forklaringen ligger i **faktoren** $\boldsymbol{\frac{2x}{R}}$ i ligning (7) .

Hermed har vi set hvor **nyttigt** et matematisk redskab **rækkeudvikling er i fysik**.

Appendiks

Forklaring og definition af inertialsystem.

Newtons love gælder i *inertialsystemer.* Et kordinatsystem, hvori ***inertiens lov*** (se 1. lov nedenfor) gælder, kaldes et inertialsystem. Inertialsystemer er koordinatsystemer som er i hvile eller i jævn bevægelse i forhold til fiksstjernerne. Og alle koordinatsystemer som bevæger sig med konstant hastighed i forhold til et inertialsystem, er også inertialsystemer.
Jorden er kun med tilnærmelse et inertialsystem, da jorden både accelererer i sin bevægelse om solen og i rotationen om sin egen akse. Newtons love gælder således kun med (***meget god***) tilnærmelse på jorden. Så det er ok at anvende Newtons love her.

Newtons 1. lov Inertiens lov (træghedsloven)
Et legeme, der ikke er påvirket af kræfter, eller hvor den resulterende kraft ($\boldsymbol{F}_{res}$) er nul, ligger enten i hvile eller bevæger sig med konstant hastighed, dvs med konstant fart og retning ($\boldsymbol{v}$ = konstant) ad en ret linje.
Inertien, trægheden for legemet betyder, at det skal accelereres for at opnå en anden hastighed. (Legemets inerti,træghed er en modstand mod ændring af tilstand. Legemet siges at have en træg masse).

$$\boldsymbol{F}_{res} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$