Løsning af differentialligningsystem:

2 koblede differentialligninger af 1. orden

af John V. Petersen

Vi skal løse følgende system af differentialligninger:

$$x'_1 = x_1 + 2x_2$$

$$x'_2 = 3x_1 + 2x_2 \qquad (1)$$

De to differe[redacted]
Derfor kan v[redacted]

Vi vil derfor[redacted]t:

Vi kan skriv[redacted]

For at løse ([redacted]hørende
egenvektore[redacted]

De fundne e[redacted]
(**D** betegner[redacted]

Det gør vi ved brug af $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 , & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \ \boldsymbol{P}$ $\left(\boldsymbol{v}_1 , \ \boldsymbol{v}_2 \text{ er en basis for } \boldsymbol{P} \right)$

Ved en substitution $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{y}$ dekobler vi systemet (1).

Vi kan nu løse det dekoblede system på sædvanlig måde, og finde løsningerne y_1 *og* y_2.

Til sidst udregner vi blot $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{y}$ og finder løsningerne til (1) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Mere skematisk har vi opskriften på løsning af differentialligningssystemet af 1. orden:

1. *Opskriv matricen* $\boldsymbol{A}$ **for** *systemet*
2. *Find egenværdier* λ_1, λ_2 *og de til hørende egenvektorer* $\boldsymbol{v}_{1,} \boldsymbol{v}_2$
3. *Opskriv* $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & , & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}$ *og udregn* $\mathbf{D} = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{P}$
4. Indfør ny variabel og udfør substitutionen $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{y}$ og få det nye dekoblede system.

[redacted]

Det gør vi ved at finde nulrummet for matricen $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$, dvs. løse $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

For $\lambda_1 = 4$: Vi finder nulrummet for $\boldsymbol{A} - 4\,\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

[redacted]

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$, hvor egenværdierne λ_1, λ_2 netop er værdierne i diagonalen.

4. Vi vil indføre en ny variabel $\mathbf{y}$ og udføre substitutionen $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{y}$ **.**

Derved får vi det nye dekoblede system:

$\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{y} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}' = \mathbf{P}\,\mathbf{y}'$ **.** Vi substituerer dette resultat ind i ligningen

$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ og får $\mathbf{P}\,\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{y} \;\Rightarrow\; \mathbf{y}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{y} = \mathbf{D}\,\mathbf{y}$ **.**

Så har vi det dekoblede system:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

5. Vi løser [redacted]

$y_1' = 4$[redacted]

$y_2' = -$[redacted]

.

$y_1 = C_1\cdot$[redacted]

$y_2 = C_2\cdot$[redacted]

6. Til sidst u[redacted]

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{y}$[redacted]

så $x_1 = 2$[redacted]

Løsningern[redacted]

$\boldsymbol{x} = C_1\cdot e^{4\cdot}$[redacted]

Dette udtry[redacted]iagonaliserbar

.

Følgende sætning sammenfatter dette :

Sætning 1:

$\mathbf{A}$ er en diagonaliserbar n x n matrice, og $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \dots & \boldsymbol{v_n} \end{bmatrix}$

$$\textit{Der gælder , at} \quad \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{A} \ \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ & . & & . \ . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Så er den generelle løsning til differentialligningssystemet $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$

$$\mathbf{x} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \boldsymbol{v_1} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \boldsymbol{v_2} + \dots + C_1 \cdot e^{\lambda_n \cdot t} \boldsymbol{v_n}$$