Brudstykker af den matematiske logik

1 Introduktion

Al matematik består af tre dele. De to første er

- et regelsæt for vor ræsonneren
- noget at ræsonnere om.

Første del dækkes af den matematiske logik, anden del af mængdelæren. Mængdelæren indeholder de objekter, matematikken beskæftiger sig med.

I streng formel forstand skal ethvert matematisk objekt kunne henføres til mængdelæren og ethvert matematisk udsagn (enhver "sætning", ethvert "teorem", hvilken sprogbrug I nu foretrækker) skal kunne udledes ved brug af logikkens regler ud fra særlig simple udsagn, de såkaldte mængdeteoretiske aksiomer.

Logikken og mængdelæren udgør matematikkens grundlag. De er vores spilleregler. Kender vi dem, har vi i princippet mulighed for at beherske al matematik. Historisk set, har der ikke været en skelnen mellem logikken og mængdelæren. Denne skelnen er af nyere dato, den stammer fra vort århundrede. Den har ført til en klargøring af matematikken og til helt ny erkendelse af matematisk-filosofisk karakter.

Jeg nævnte, at der er tre bestanddele i matematik. Ifølge ovenstående skulle de to første, logikken og mængdelæren, være nok. Men der mangler noget, ja faktisk det vigtigste, nemlig

- resten: hensigten, fortolkningerne, drømmene, visionerne, skønheden!

Det var med hensigten matematikken begyndte. Tal og regning hermed til at holde hus med ting og sager, geometriske objekter og manipulationer hermed til at beskrive og forstå form (flodkulturerne and all that!).

Der ligger nok mere hensigt og fortolkning og mindre skønhed bag ovenstående antydninger. Og det humanistiske islæt i beskrivelsen ødelægges helt, når vi betænker den magt der har ligget i – og stadig ligger i – at beherske videnskaberne, her altså specielt matematikken.

Æstetikken, skønheden, er gradvist vokset frem i forbindelse med mere reflektive overvejelser, der har ført til en udstrakt abstraktion. Og hvad er det så, der er så smukt ved matematikken? Opdagelsen af tankens kraft, opdagelsen af fællestræk, muligheden for at sammenfatte, friheden til at modellere virkeligheden, det overraskende ræsonnement, den smukke sætning, $\cdots$ Jeg skal spare jer for mere end disse overskrifter på mulige svar. Men sikkert er det, at det æstetiske element for mange – og ikke blot for os "professionelle" lærere, men, ja det håber jeg da, også for jer studerende – er det vigtigste incitament til at give sig matematikken i vold. Hos enkelte er der ligefrem tale om en besættelse $\cdots$ det er selvfølgelig for meget af det gode, der er jo, heldigvis, andet end matematik i tilværelsen.

Lad mig igen understrege betydningen af "det tredje element" (hensigten $\cdots$). Det siger sig selv, at dette spiller ind når man arbejder med modeller af virkeligheden (anvendt matematik). Men, noget overraskende, gælder det enhver selv nok så abstrakt arbejdende matematiker. Nok har vi det formelle apparat at holde os til, altså de to første elementer, logikken og mængdelæren. Men det viser sig at være praktisk umuligt at arbejde strengt formelt uden at hensigten og skønheden går tabt. Situationen er endda helt absurd, idet kun de aller færreste matematikere kender matematikkens grundlag som det er indeholdt i logikken og mængdelæren.

Senere – i kapitlet om aksiomatisk mængdelære – skal jeg nærmere komme ind på grundene hertil.

Nok er det kun de færreste, der kender matematikkens grundlag, men alle matematikere kender *til det* ! Det er nødvendigt for at opnå sikkerhed i ræsonnementer og teoridannelse, og desuden for at erkende matematikkens muligheder. Derfor skal I også – her på Mat Y – have et indblik i matematikkens grundlag. Herved får I en ballast, der vil være en stor styrke på jeres videre vej ind i matematikkens verden. Lad mig vide, hvis jeg tager fejl!

Endelig nogle ord om niveau og sprog. Niveauet vil være noget overfladisk og ufuldstændigt, men med enkelte videregående afsnit og opgaver. Sproget er naturligvis dansk, men når jeg fremdrager det, er det faktisk en lidt anden dimension, jeg har i tankerne. Netop når man ser på matematikkens grundlag, bør man i princippet nøje redegøre for sprogbrug (behov for et formelt sprog). Dette er dog at gå for vidt. Ikke alene skal vi anvende dansk, vi skal anvende pæredansk og gå ud fra en velvillig indstilling som den kommer til udtryk i følgende

Tese. Vi kan tale og forstå hinanden

– Næppe rigtigt, men uden denne tese risikerer vi at blive suget ned i et bundløst, selvbeskuende filosofisk morads, og det vil næppe fremme tilegnelsen af de idéer og den visdom der ligger gemt i matematikkens grundlag.

2 Kontekst

Logikken giver et regelsæt for vor tænkning, som er uafhængig af *konteksten* (kontekst = sammenhæng, omstændigheder). En *kontekst* består af et *univers*, hvortil er knyttet *funktioner, relationer* og *udsagn.*

Selve *universet* indeholder *objekterne* (genstandene), vi interesserer os for.

Funktionerne kan være af flere typer. De simpleste er de 0-*ære* funktioner, funktioner, der ikke kræver noget argument. Med andre ord, dette er *konstanterne*. De 1-*ære* funktioner er funktioner, der til hvert objekt knytter et andet objekt. De 2-*ære*, eller *binære*, funktioner knytter objekter til givne par af objekter. Og så fremdeles for 3-ære, 4-ære, $\cdots$, n-ære funktioner.

Relationerne falder også i typer efter "æritet". De simpleste og vigtigste er her de 2-*ære*, normalt kaldet de *binære* relationer. Disse knytter en af sandhedsværdierne "sand" og "falsk" til et givet par af objekter. Enhver kontekst har tilknyttet en bestemt relation, kaldet *identiteten* og betegnet "$=$". Det er en binær relation, der "opfører sig som lighed bør gøre" (præciseres ikke i alle detaljer, men belyses ved eksempler).

Udsagnene knyttet til en kontekst falder dels i *atomiske* udsagn, dels i *sammensatte* udsagn. De atomiske udsagn udnytter de funktioner og relationer, der er knyttet til konteksten. Da enhver kontekst er udstyret med identitet, har vi altid atomiske udsagn så som "$x = y$" og "$a = b$". Udsagnet "$x = y$" er sandt, hvis sandhedsværdien, som relationen "identitet" knytter til parret (x, y) af objekter netop er "sand". Ellers er udsagnet falsk. Vi kan nu nævne nogle af de krav, der stilles til identiteten. Det er følgende tre krav: *Refleksitivitet*: "$x = x$" skal være sand for alle objekter x, *symmetri:* er "$x = y$" sand, da også "$y = x$" og *transitivitet:* er "$x = y$" og "$y = z$" sande, da også "$x = z$".

Indeholder konteksten også en 1-ær funktion f, er der flere muligheder for at danne atomiske udsagn, nemlig "$y = f(x)$", "$f(x_1) = f(x_2)$" og varianter heraf ("$b = f(a)$" osv.). Identitetsrelationen antages at være så "stærk", at vi ikke kommer i strid med almindelig sund fornuft, med det, der er vores hensigt med denne relation ("identitetsrelationens idé"). Hermed mener vi blot, at vi af sandheden af udsagnene "$y = f(x)$" og "$z = y$" kan slutte sandheden af udsagnet "$z = f(x)$". Der skal altså gælde et *substitutionsprincip* for identitetsrelationen (ovenfor blev y substitueret med z). Når konteksten indeholder flere relationer og funktioner, udvides substitutionsprincippet for identitetsrelationen tilsvarende.

De *sammensatte* udsagn er udsagn, der dannes ud fra atomiske udsagn eller ud fra tidligere fundne sammensatte udsagn efter særlige regler, der behandles udførligt i det følgende.

Udsagnene kan også opdeles efter *aksiomer* og andre udsagn. *Aksiomerne* er særlige (sammensatte) udsagn knyttet til konteksten som på forhånd er erklæret at være sande.

Eksempel 1. Konteksten de naturlige tal med 0. Her er universet mængden $\mathbb{N}_0$ af naturlige tal inklusiv 0. Desuden hører der til konteksten konstanten 0, de to binære funktioner "$+$" og "$\cdot$" samt, som sædvanlig, identiteten "$=$" og derudover endnu en binær relation, "$\leq$". Af udsagn har vi "$2+2=4$" osv. Det er konkrete udsagn, der ikke kræver videre specifikation for at fastslå sandhedsværdien. Mere generelle *åbne* udsagn (også kaldet *prædikater,* se senere) er udsagn af typen "$a = b + c$", "$a \leq 2 + x$" osv. Disse udsagn kræver en specifikation (ovenfor af a, b, c og x) før sandhedsværdierne kan fastlægges. I denne kategori findes også mere komplicerede udsagn som f.eks. følgende: "for alle x gælder $2+x \geq a$" eller, udtrykt ved brug af *alkvantoren* (se også senere): "$\forall x : 2 + x \geq a$". Læg mærke til at sandhedsværdien af det sidst nævnte udsagn kun afhænger af værdien af a (ikke af nogen specifikation af x).

Blandt aksiomerne, der hører til denne kontekst nævnes følgende to "$\forall x : x + 0 = x$" og "$\forall x \forall y : x + y = y + x$". Der er mange flere, men vi skal ikke komme ind herpå. $\square$

Eksempel 2: Konteksten alle endelig dimensionale vektorrum over $\mathbb{R}$. Her interesserer vi os for to slags objekter, dels de enkelte vektorrum, der kan komme på tale (f.eks. $\mathbb{R}^3$, vektorrumet af polynomier af grad højst 5 med reelle koefficienter osv.), dels elementerne (vektorerne) i disse vektorrum (f.eks. vektoren $(5, 0, -\sqrt{2})$ i $\mathbb{R}^3$ eller polynomiet $x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x^5$ i vektorrummet af polynomier af grad højst 5). Universet indeholder så vektorrum og vektorer.

Betegner vi vektorrum med store latinske bogstaver og vektorer med fed skrift, kan vi f.eks. se på følgende atomiske udsagn: "$\mathbf{a} = \mathbf{b}$", "$\mathbf{a} \in X$", "$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$" osv. samt følgende mere komplicerede udsagn: "for vektorrummet X findes en basis med 3 elementer", "Y er et underrum af X", "underrummene Y og Z i X danner direkte sum" osv. Aksiomerne er dem, vi kender fra den lineære algebra, f.eks. "er X et vektorrum, findes en vektor $\mathbf{0} \in X$ så $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ for alle $\mathbf{a} \in X$" osv. $\square$

Eksempel 3. Konteksten reelle funktioner af en reel variabel. Universet består så af disse funktioner og udvalget af (atomiske) udsagn og aksiomer afspejler vor hensigt, der typisk består i at vi vil kunne tale om funktionsværdier, vi vil kunne regne med funktioner og vi vil kunne sammenligne funktioner. □

Eksempel 4. Konteksten af dagligdags objekter og idéer samt udsagn herom. Mens de allerede nævnte eksempler fra matematikkens verden kunne defineres ganske præcist (hvilket vi dog ikke gjorde), er det ikke klart, hvordan dette skulle gøres for denne kontekst. Universet kunne indeholde objekter som "hus", "dreng", "pige", "regn", "kultur" osv. og udsagn kunne være "det regner", "huset har 4 vinduer", "Morlille er en sten" osv. Vi skal ikke søge at præcisere denne kontekst nærmere. Den er medtaget for at understrege, at en kontekst ikke behøver være af matematisk natur. □

Måske kan følgende billede være til hjælp: En kontekst kan vi forestille os som en æske, universet, der indeholder alle kontekstens objekter. Æsken har på indersiden af låget påskrevet en masse tekst, der dels fortæller os om nogle muligheder, vi har (svarende til f.eks. muligheden for at undersøge lighed, størrelsesforhold, sammensætning v.hj. af regneregler osv. osv.), dels fremhæver visse egenskaber, aksiomerne, som fabrikanten højt og helligt sværger på er opfyldt.

Tit er det væsentligste ved en kontekst de tilhørende objekter, mens de tilhørende udsagn, specielt aksiomerne er underforstået. Derfor vil vi ofte tillade os at tale om universet, selvom vi egentlig har hele konteksten i tankerne.

Den fremstilling, vi har lagt op til med fokusering på begrebet kontekst, sigter mod det *semantiske,* det betydningsbærende. Objekterne i en bestemt kontekst har en betydning for os og de relationer, der findes mellem objekterne i en kontekst fortæller os om fortolkningerne. Man kan godt have en anden kontekst med objekter og relationer af helt samme type, men for hvilken der gælder lidt andre udsagn. Eksempelvis kunne vi se på "en gruppe". Én kontekst af denne type kunne være en kommutativ gruppe, en anden kunne dreje sig om en ikke-kommutativ gruppe.

Ovenstående kan nok virke noget uklart. I mere udførlige fremstillinger skelner man mellem "typer" (f.eks. typen af grupper) og realisationer heraf, som man så foretrækker at kalde "modeller" (frem for vores mere neutrale betegnelse "kontekst").

Det semantiske lag indeholder nogle dybe filosofiske problemer: Er der nogen forbindelse mellem det matematiske eksistensbegreb og virkelighedens eksistensbegreb? I øvrigt, hvad er "virkeligheden"? Og hvad dækker det matematiske sandhedsbegreb over? Min egen indstilling til sådanne problemer er dyb fascination, men samtidig vægrer jeg mig ved at fortabe mig heri, da det let kan blive for navlebeskuende og lidet konstruktivt.

Det sproglige – og nu tænker jeg på vort sædvanlige sprog, dagligsproget, brugssproget – spiller ind ved diskussion af kontekst og fortolkninger. Det er jo dette værktøj vi bruger, når vi opstiller modeller, ræsonnerer derover og fortæller om hensigten. Og vi må bygge på, at dette "metasprog" (vort daglige sprog, som jo ligger uden for den matematiske teoridannelse og det matematisk logiske sprog, men hvorigennem vi betragter og diskuterer disse sager) forstås i kommunikationen mennesker imellem. Lad mig derfor igen minde om tesen fra indledningen: *Vi kan tale og forstå hinanden!*

3 Konkrete udsagn, udsagnsvariable

Det kan virke mærkeligt, at vi brugte megen tid på at diskutere kontekst, når vi netop slog fast, at *logik er kontekstuafhængig.* Jeg tror nu, det vil lette forståelsen en hel del.

Lad os først se på betrebet "udsagn". Dette begreb har en dagligdags betydning, der faktisk ligger tæt på logikkens brug. Der er dog i logikken flere beslægtede, men forskellige begreber, der knytter an hertil. Når vi har opnået en vis øvelse, vil vi bruge "udsagn" som fællesbetegnelse for disse forskellige begreber. Hvilket begreb, man har i tankerne kan variere fra gang til gang og må så fremgå af sammenhængen.

Vi ser først på det, vi udførligt vil kalde *konkrete udsagn.* Som eksempler nævnes "$2+2=4$", "der er uendelig mange primtal af formen $2^{2^n}+1$", "$\int_0^1 e^x dx = 0$", "det regner", osv. Mere præcist kan vi sige, at *et konkret udsagn er en bestemt påstand hørende til en bestemt kontekst.* Desuden skal det understreges, at vi udelukkende vil arbejde inden for den klassiske logiks rammer, hvilket giver sig udslag i, at ethvert konkret udsagn enten er sandt eller falskt, og ikke begge dele.[1]

For at kunne arbejde kontekstuafhængigt i logikken, indfører vi begrebet *udsagnsvariabel.* En udsagnsvariabel er sådan set kun et tegn, f.eks. P, Q, R, S, T, P_1, P_2, P_3 eller visse andre tegn. Tanken er den, at – lad os f.eks. se på tegnet P –

[1] Jeg forestiller mig, at mange, der allerede har hørt om Gödel's uafhængighedsresultater, her kunne komme i tvivl om fornuften heri. Sagen er jo den, at Gödel har vist, at enhver blot nogenlunde righoldig matematisk teori fastlagt ved aksiomer tillader udsagn, der hverken kan bevises eller modbevises. Hvordan kan vi så insistere på at hvert konkret udsagn er enten sandt eller falskt ? For at forstå det, må vi holde fast i kontekstbegrebet. To kontekster (tænk evt. på æsker med objekter, som vi lagde op til) kan udmærket være forskellige og alligevel have tilknyttet helt samme begreber og aksiomer (deklarationer på indersiden af æskens låg). De er så af samme type (jvf. s. 5). Så er der mulighed for at et og samme (sammensatte) udsagn giver god mening i begge kontekster og er sand i den ene kontekst og falsk i den anden. Som antydet s. 5 kunne det dreje sig om noget så uskyldig som den kendsgerning, at der både findes kommutative og ikke-kommutative grupper. Det, der gør Gödel's resultat ejendommeligt, overraskende og måske svært forståeligt er, at det også gælder, når vi ser på kontekster, der sigter på at afspejle *hele* matematikken.

P kan stå for et hvilket som helst udsagn. For at tillægge P en konkret "værdi", skal der en *specifikation* til. Dels skal konteksten specifiseres, dels skal man inden for den valgte konteksts rammer specificere et konkret udsagn. Så P kan både stå for det konkrete udsagn "$2+2=4$" og det konkrete udsagn "der er uendelig mange primtal af formen $2^{2^n}+1$", begge hørende til konteksten af naturlige tal. Eller P kunne stå for andre konkrete udsagn hørende til andre kontekster.

Der er endnu en ting at sige om udsagnsvariable. I princippet skal de tegn, vi bruger til at betegne udsagnsvariable tages fra en på forhånd fastlagt liste af *reserverede* tegn, dvs. disse tegn må ikke senere benyttes til andre formål. Dette strenge krav vil vi dog ikke overholde. F.eks. vil vi i plangeometrien ikke afholde os fra at bruge P og Q til at betegne punkter i planen, selvom det strengt taget er forbudt, når tegnene nu optræder i den reserverede liste af tegn til at betegne udsagnsvariable. Vi vil ikke være alt for pernittengryn, og skal således afholde os fra at nedskrive en præcis liste af tegn, reserveret til udsagnsvariable. Vor løsagtighed på dette punkt giver i praksis ingen problemer fremover. Det væsentlige er, at vi kan *forestille* os, at der findes en sådan liste af reserverede tegn, der står for hver deres udsagnsvariabel. To udsagnsvariable er altså kun den samme udsagnsvariabel, når tegnet, der betegner dem er det samme.

Når en udsagnsvariabel er specifiseret, er der to muligheder for sandhedsværdien af det derved fremkomne konkrete udsagn: "sand" og "falsk". Dette giver vi udtryk for i *sandhedstabellen* over P, der blot opregner mulighederne. Vi har valgt overalt i sandhedstabeller og lignende opskrivninger at bruge *sandhedsværdierne* 1 og 0, "1" til at betegne "sand" og "0" til at betegne "falsk".

P
1
0

Arbejder vi i en vis sammenhæng med flere udsagnsvariable på én gang, kan vi i en sandhedstabel opregne de muligheder, der er for sandhedsværdierne af de indgående udsagnsvariable. F.eks. for de tre udsagnvariable P, Q og R finder vi de otte muligheder udtrykt i nedenstående sandhedstabel.

P	Q	R
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Sandhedstabel for P, Q, R.

Når flere udsagnsvariable optræder, vil vi altid antage (uden eksplicit at gøre opmærksom herpå), at vi ved specifikation vælger samme kontekst for dem alle. Derimod er der, så snart konteksten er fastlagt, fuld frihed til at vælge konkrete udsagn (fra den givne kontekst) til at stå for de indgående udsagnsvariable. Vedtægten er helt naturlig. Den svarer blot til, at man først specifiserer konteksten og dermed de objekter, man vil sige noget om, før man underkaster konkrete udsagn en nærmere undersøgelse.

Det er let at se, at alle 8 muligheder for sandhedsværdierne af P, Q og R opregnet i ovenstående tabel kan forekomme ved specifikation. Hvis vi arbejder med plangeometrien – dette er så vor kontekst – og A betegner en retvinklet trekant, kan vi f.eks. specifisere P, Q og R som følger:

$P:$	A	er en polygon
$Q:$	A	er en trekant
$R:$	A	indeholder en ret vinkel.

Med denne specifikation bliver alle tre udsagn sande, svarende til den første af de opregnede muligheder. Det er klart, at vi med andre specifikationer kan illustrere alle opregnede muligheder (gør det !).

4 Sammensatte udsagn (udsagnsformer), ækvivalens

Lidt løst kan vi definere et *sammensat udsagn,* også kaldet en *udsagnsform* på følgende måde: Lad $P, Q, \cdots, V$ være udsagnsvariable. Vi siger da, at $\varphi(P, Q, \cdots, V)$ er et *sammensat udsagn* med $P, Q, \cdots, V$ som indgående udsagnsvariable, såfremt der til enhver specifikation af $P, Q, \cdots, V$ er knyttet en bestemt sandhedsværdi, som vi kalder sandhedsværdien af $\varphi(P, Q, \cdots, V)$, og såfremt denne sandhedsværdi kun afhænger af sandhedsværdierne for de indgående udsagnsvariable $P, Q, \cdots, V$.

Det, der interesserer os ved sammensatte udsagn er de tilknyttede sandhedsværdier. Og ifølge definitionen giver dette, præcis som for udsagnsvariable, kun mening når vi har foreskrevet en specifikation. I henhold til definitionen behøver vi imidlertid ikke angive en fuld specifikation for at kende sandhedsværdien af et sammensat udsagn. Det er nok, vi angiver sandhedsværdierne for de indgående udsagnsvariable. Derfor kan sammensatte udsagn angives via sandhedstabeller. Lad os se et eksempel.

Eksempel 1. Lad P, Q og R være udsagnsvariable og definer udsagnsformen

$U = \varphi(P, Q, R)$ via nedenstående skema.

P	Q	R	U
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

F.eks. ser vi, at hvis, ved en bestemt specifikation, P er falsk og Q og R begge sande, så er U sand. $\square$

Vi fremhævede før, at det, der interesserer os ved en udsagnsform er dets sandhedsværdier (svarende til de forskellige spcifikationer). Denne holdning afpejles i følgende vigtige definition: *To udsagnsformer er ækvivalente, når de har samme sandhedsværdier.* Mere præcist: Udsagnsformen U og udsagnsformen V er *ækvivalente,* og vi skriver $U \equiv V$, når U og V har samme sandhedsværdi ved enhver specifikation af samtlige udsagnsvariable, der indgår enten i U eller i V.

I logisk henseende regnes ækvivalente udsagnsformer for helt ligeberettigede, og der er ingen grund til at skelne sådanne udsagnsformer fra hinanden.

To udsagnsformer, *tautologien* og *absurditeten* (eller *kontradiktionen,*) spiller en særlig rolle. Kort kan tautologien defineres som *den altid sande udsagnsform* og absurditeten som *den altid falske udsagnsform.* Mere præcist kan de defineres som udsagnsformerne U og V med kun den ene indgående udsagnsvariabel P ud fra sandhedstabellen :

P	U	V
1	1	0
0	1	0

Vi kunne også have defineret tautologien og absurditeten som udsagnsformerne med f.eks. P og Q som indgående udsagnsvariable ud fra tabellen

P	Q	U'	V'
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

Selvom formen på U og U' er lidt forskellig (U har én, U' to indgående udsagnsvariable), kommer de ud på ét; ved specifikation af P og Q giver de altid samme sandhedsværdi. M.a.o., U og U' er ækvivalente: $U \equiv U'$. Tilsvarende er $V \equiv V'$. Da vi ikke ønsker at skelne mellem de mulige udsagnsformer, der alle er ækvivalente med tautologien U, indfører vi fællesbetegnelsen 1 for en vilkårlig af de mulige udsagnsformer, og vi tænker på 1 som én udsagnsform tautologien 1.

Tilsvarende indfører vi betegnelsen 0 for absurditeten. At vi misbruger symbolerne 0 og 1 – der jo allerede har mange betydninger (tal, sandhedsværdier, nulvektorer osv.) – giver normalt ikke anledning til misforståelser, men medvirker til at holde matematikkens symbolskov nede. Prisen herfor er en vis flertydighed.

5 De logiske konnektiver

Vi indfører nogle helt centrale udsagnsformer: *negation, konjunktion, disjunktion* og *implikation.* Hertil ser vi på de to skemaer

P	$\neg P$
1	0
0	1

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Den første udsagnsform, $\neg P$, er *negationen* af P, også kaldet non-P. De næste, der har to indgående udsagnsvariable, her P og Q, er *konjunktionen* $P \wedge Q$ af P og Q ("både og"), *disjunktionen* $P \vee Q$ af P og Q ("enten eller", i matematikken altid forstået som enten den ene, eller den anden eller begge) og *implikationen* $P \Rightarrow Q$ ("hvis, så" eller "$\cdots$ medfører $\cdots$").

Vi refererer til $\neg, \wedge, \vee$ og $\Rightarrow$ som *logiske konnektiver.*

Ovenstående er et første skridt i opbygningen af nye udsagnsformer. Vi skal blot anvende et enkelt princip, *substitutionsprincippet,* sammen med ovenstående konstruktioner for at få en metode til dannelse af et sandt væld af nye udsagnsformer. For eksempel kan vi se på konjunktion. Vi har kun defineret konjunktion af to udsagnsvariable (vi valgte P og Q ovenfor). Men det er klart, at såfremt U og V er vilkårlige udsagnsformer, giver det god mening at se på udsagnsformen "både U og V", som vi betegner $U \wedge V$. Tilsvarende giver det for vilkårlige udsagnsformer god mening at se på udsagnsformerne $\neg U, U \vee V$ og $U \Rightarrow V$.

Eksempel 1. Lad os se på udsagnsformen U fra Eksempel 3.1 og udsagnsformen $V = P \vee Q$. Udsagnsformen $U \wedge V$ har så sandhedsværdier som vist i tabellen.

P	Q	R	U	V	$U \wedge V$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

Nedskriver vi også sandhedsværdierne for $Q \wedge R$, ser vi, at det giver samme resultat som $U \wedge V$. Derfor gælder ækvivalensen $U \wedge V \equiv Q \wedge R$. $\square$

Vi anvender substitutionsprincippet til på én gang at definere den logiske konnektiv *biimplikation,* betegnet $\Leftrightarrow$ for vilkårlige udsagnsformer U og V: Ved *biimplikationen* $U \Leftrightarrow V$ forstås konjunktionen af de to implikationer $U \Rightarrow V$ og $V \Rightarrow U$. Vi har altså pr. definition ækvivalensen

$$U \Leftrightarrow V \equiv (U \Rightarrow V) \wedge (V \Rightarrow U)\,.$$

Dette kan også tydeliggøres i en sandhedstabel:

U	V	$U \Rightarrow V$	$V \Rightarrow U$	$U \Leftrightarrow V$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Læg mærke til, at vi her har anført en sandhedstabel med udsagnsformer (og ikke udsagnsvariable som hidtil) som indgange. Det er der heller ikke noget i vejen for, sålænge man ser på egenskaber, der kun afhænger af sandhedsværdierne for de anførte udsagnsformer (og ikke på egenskaber, der kræver kendskab til sandhedsværdierne for de – muligvis mange – udsagnsvariable, der indgår i disse udsagnsformer).

6 Udsagnskalkylen, udsagnslogiske identiteter

Udsagnskalkylen giver os nogle regler i hænde, der kan hjælpe os til at etablere sammenhænge mellem givne udsagnsformer. Der er især to former for sammenhæng, der interesserer os: Dels den allerede indførte *logiske ækvivalens* (før blot kaldet ækvivalens), dels *logisk konsekvens.* Lad os først omformulere kravet til ækvivalens (se §3) på to måder.

To udsagnsformer U og V er logisk ækvivalente hvis og kun hvis udsagnsformen $U \Leftrightarrow V$ er sand ved en vilkårlig specifikation. Dette er klart (overvej!) Da en tautologi er en altid sand udsagnsform, ses heraf, at ækvivalens kan udtrykkes mere elegant som følger.

> *To udsagnsformer U og V er logisk ækvivalente, hvis og kun hvis udsagnsformen $U \Leftrightarrow V$ er en tautologi.*

Vi vil nu definere, hvad det vil sige, at en udsagnsform V er en *logisk konsekvens* af en anden udsagnsform U. Vi vedtager, at dette skal betyde, at implikationen $U \Rightarrow V$ er sand ved en vilkårlig specifikation. Lidt mere malende og intuitivt ser vi, at dette kommer ud på at V af rent logiske grunde følger af U, idet gyldigheden af implikationen $U \Rightarrow V$ ikke afhænger af konteksten, men er noget, der gælder for enhver specifikation.

I lighed med logisk ækvivalens, ser vi, at logisk konsekvens også kan udtrykkes elegant via tautologier:

> *Udsagnsformen V er en logisk konsekvens af udsagnsformen U, hvis og kun hvis implikationen $U \Rightarrow V$ er en tautologi.*

For logisk konsekvens bruges tegnet $\models$, altså skrives $U \models V$ for "V er en logisk konsekvens af U". Bemærk, at den form for logisk ækvivalens og logisk konsekvens, som vi har indført, er semantik-orienterede, idet de knytter an til specifikationer af en kontekst.

Lad os nedenfor samle de vigtigste logiske ækvivalenser, som vi også kalder de *udsagnslogiske identiteter:*

UDSAGNSLOGISKE IDENTITETER, UI 1-16

1.	$U \vee V$	$\equiv$	$V \vee U$
2.	$U \wedge V$	$\equiv$	$V \wedge U$
3.	$T \vee (U \vee V)$	$\equiv$	$(T \vee U) \vee V$
4.	$T \wedge (U \wedge V)$	$\equiv$	$(T \wedge U) \wedge V$
5.	$T \vee (U \wedge V)$	$\equiv$	$(T \vee U) \wedge (T \vee V)$
6.	$T \wedge (U \vee V)$	$\equiv$	$(T \wedge U) \vee (T \wedge V)$
7.	$U \vee 0$	$\equiv$	U
8.	$U \wedge 1$	$\equiv$	U
9.	$U \vee \neg U$	$\equiv$	1
10.	$U \wedge \neg U$	$\equiv$	0
11.	U	$\equiv$	$\neg(\neg U)$
12.	$U \Rightarrow V$	$\equiv$	$\neg U \vee V$
13.	$U \Rightarrow V$	$\equiv$	$\neg V \Rightarrow \neg U$
14.	$U \Leftrightarrow V$	$\equiv$	$(U \Rightarrow V) \wedge (V \Rightarrow U)$
15.	$\neg(U \vee V)$	$\equiv$	$\neg U \wedge \neg V$
16.	$\neg(U \wedge V)$	$\equiv$	$\neg U \vee \neg V$.

Vi bør måske også eksplicit nævne følgende to regler:

$$
\begin{array}{ll}
17 & 1 \vee 1 \equiv 1 \\
18 & 0 \wedge 0 \equiv 0,
\end{array}
$$

der dog forholdsvis let kan udledes af de øvrige (eller mere banalt via sandhedstabeller).

Reglerne 1 og 2 er *kommutative* regler, 3 og 4 er *associative* regler, 5 og 6 er *distributive* regler, 11 er reglen om *dobbeltnegering,* 13 er reglen om *kontraponering* og 14 og 15 er *de Morgan's regler.* Ved hjælp af de Morgans regler og reglen om dobbeltnegering indses, at der gælder en vis form for *dualitet* blandt udsagnsformer, der kun indeholder konnektiverne $\urcorner$, $\vee$ og $\wedge$ (sammenlign 1 og 2, 3 og 4, 5 og 6). Vi overlader det til læseren at eftervise alle disse ækvivalenser. Beviserne kan føres via sandhedstavler.

Vi vil ikke her være lige så grundige ved opstilling af logiske konsekvenser, men nøjes med et enkelt eksempel og vil så senere vende tilbage hertil.

Eksempel 1. Der gælder for vilkårlige udsagnsformer U og V, at V er en logisk konsekvens af konjunktionen af U og $U \Rightarrow V$, dvs. der gælder

$$U \wedge (U \Rightarrow V) \models V \,.$$

Ifølge definitionen kommer dette ud på, at udsagnsformen

$$(U \wedge (U \Rightarrow V)) \Rightarrow V$$

er en tautologi. Det kan læseren sikkert let vise ved at opstille en sandhedstabel. Imidlertid vil vi vise, at man kan klare sig uden (de lidt barnlige!) sandhedstabeller og i stedet benytte de udsagnslogiske identiteter. Vi har

$$
\begin{aligned}
(U \wedge (U \Rightarrow V)) \Rightarrow V &\equiv (U \wedge (\urcorner U \vee V)) \Rightarrow V \\
&\equiv ((U \wedge \urcorner U) \vee (U \wedge V)) \Rightarrow V \\
&\equiv (0 \vee (U \wedge V)) \Rightarrow V \\
&\equiv (U \wedge V) \Rightarrow V \\
&\equiv \urcorner(U \wedge V) \vee V \\
&\equiv (\urcorner U \vee \urcorner V) \vee V \\
&\equiv V \vee (\urcorner U \vee \urcorner V) \\
&\equiv V \vee (\urcorner V \vee \urcorner U) \\
&\equiv (V \vee \urcorner V) \vee \urcorner U \\
&\equiv 1 \vee \urcorner U \\
&\equiv 1 \,,
\end{aligned}
$$

som ønsket. Læseren opfordres til for hver ækvivalens at gøre sig klart, hvilken regel, der er anvendt.

Eksemplet er interessant ved at vi har bevæget os ind på det syntaktiske plan. Herom mere senere. $\square$

Vedrørende hierarkiet af de logiske symboler gælder følgende vedtægter (som vi i det foregående stiltiende har benyttet nogle gange): Fra "stærkest" til "svagest" er rækkefølgen af symbolerner følgende:

$$\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow \ .$$

Negationssymbolet er altså det, der binder stærkest. Vi tilføjer, at det af og til er bekvemt at benytte "impliceres af", $\Leftarrow$, der binder lige så stærkt som $\Rightarrow$ og defineres ved:

$$U \Leftarrow V \equiv V \Rightarrow U \, .$$

Til rækken af logiske konnektiver skal tilføjes "metasymbolerne"$\equiv$ og $\vdash$. Disse kommer sidst i rækken og binder altså svagest. Således betyder ovenstående ækvivalens $(U \Leftarrow V) \equiv (V \Rightarrow U)$. Af andre eksempler nævnes, at $\neg U \Rightarrow V$ betyder $(\neg U) \Rightarrow V$, ikke $\neg(U \Rightarrow V)$, at $U \wedge V \Rightarrow W$ betyder $(U \wedge V) \Rightarrow W$, ikke $U \wedge (V \Rightarrow W)$, at $U \Leftrightarrow V \Rightarrow W$ betyder $U \Leftrightarrow (V \Rightarrow W)$, ikke $(U \Leftrightarrow V) \Rightarrow W$ og endelig fremhæves de ikke helt så naturlige vedtægter:

$$\begin{aligned} U \vee V \wedge W &\equiv (U \vee U) \wedge W \, , \\ U \wedge V \vee W &\equiv U \wedge (V \vee W) \, , \end{aligned}$$

hvor man nok står sig ved altid at sætte parenteserne.

Som en sidste notationsmæssig regel nævnes, at hvis der er tvivl om betydningen af en udsagnsform, så sætter man parenteserne længst til højre først.

7 Udsagnsformer på konjunktiv normalform

Udsagnsformer kan være opbygget på meget kompliceret og uoverskuelig vis ud fra de indgående udsagnsvariable. Se f.eks. på udsagnsformen

$$(\neg P \vee (Q \Rightarrow \neg(P \vee R))) \wedge \neg(P \wedge Q \wedge R \Leftrightarrow S) \, .$$

Det er imidlertid betryggende, at enhver udsagnsform er ækvivalent med en udsagnsform skrevet på en standard form. Man kan vælge mellem forskellige standardformer. Af hensyn til et senere resultat skal vi hæfte os ved *konjunktiv normalform.* Først nogle hjælpebegreber. En *simpel udsagnsform* er en udsagnsform, der enten er en udsagnsvariabel eller negationen af en udsagnsvariabel. Eksempelvis er P, $\neg P$, S og $\neg S$ simple udsagnsformer. En *klausul* er en disjunktion af simple udsagnsformer, dog regnes tautologien 1 og absurditeten 0 også med til klausulerne (de *trivielle klausuler*). Eksempelvis er $0, 1, P, R, P \vee R, P \vee R \vee \neg S \vee \neg T$ alle klausuler. Også $P \vee R \vee S \vee \neg R \vee \neg T$ er en klausul. Den er dog logisk ækvivalent med tautologien 1, og man vil normalt skrive den på denne form. Udsagnsformen $P \Rightarrow Q$ er ikke skrevet som én, nemlig med en klausul, men dog ækvivalent med klausulen $\neg P \vee Q$.

Vi kan nu indføre den bebudede standardform:

En udsagnsform er på *konjunktiv normalform*, hvis den er skrevet som en konjunktion af klausuler.

Udsagnsformen $P \wedge (Q \vee \neg R) \wedge \neg S$ er på konjunktiv normalform (med 3 klausuler), mens $(P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow Q)$ ikke er det. Udsagnsformen $P \vee \neg R \vee S$ er også på konjunktiv normalform, selvom den slet ikke indeholder konjunktioner. Den indeholder kun én klausul.

Sætning. Enhver udsagnsform er ækvivalent med en udsagnsform på konjunktiv normalform.

Bevis. Lad U være en udsagnsform med indgående udsagnsvariable $P, Q, \cdots, T$. Sæt $V = \neg U$. Tænk på sandhedstabellen for V:

P	Q		T	V
. . .	. . .	. . .	. . .	$\vdots$
1	1		0	1
. . .	. . .	. . .	. . .	$\vdots$
0	1		1	0
. . .	. . .	. . .	. . .	$\vdots$

Enhver række i tabellen svarer til en konjunktion af simple udsagn (de to antydede rækker svarer til hhv. $P \wedge Q \wedge \cdots \wedge \neg T$ og $\neg P \wedge Q \wedge \cdots \wedge T$). Tag nu de rækker ud, der giver V sandhedsværdien 1. Det er klart, at V er ækvivalent med disjunktionen af de tilhørende konjunktioner af simple udsagn. Så er negationen af V, altså U, ækvivalent med den tilhørende konjunktion af disjunktioner af simple udsagn, hvilket netop er en udsagnsform på konjunktiv normalform. $\square$

Bemærkning. Den metode, der bruges i beviset virker, men er typisk den dårligste metode, hvis vi stræber efter at nå frem til en enkel konjunktiv normalform.

Normalt er følgende en bedre strategi: Fjern først implikationer og biimplikationer ved hjælp af ækvivalenserne

$$U \Rightarrow V \equiv \neg U \vee V \ ; \ \ U \Leftrightarrow V \equiv (U \Rightarrow V) \vee (V \Rightarrow U) \, .$$

Fjern dernæst negationer eller flyt dem så langt ind i parentesudtryk som muligt; hertil benyttes ækvivalenserne

$$\neg\neg U \equiv U \; ; \; \neg(U \wedge V) \equiv \neg U \vee \neg V \; ; \; \neg(U \vee V) \equiv \neg U \wedge \neg V \, .$$

Benyt endelig de distributive love.

Eksempel 3. Lad os skrive $\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \wedge P$ på konjunktiv normalform. Vi anvender opskriften ovenfor og finder

$$\begin{aligned} \neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \wedge P &\equiv \neg\neg(P \Rightarrow Q) \vee (R \wedge P) \\ &\equiv (P \Rightarrow Q) \vee (R \wedge P) \\ &\equiv (\neg P \vee Q) \vee (R \wedge P) \\ &\equiv ((\neg P \vee Q) \vee R) \wedge ((\neg P \vee Q) \vee P) \\ &\equiv (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee P) \\ &\equiv \neg P \vee Q \vee R \, , \end{aligned}$$

der er på den ønskede form. $\square$

8 Formelle beviser i udsagnslogikken

Definition. Ved et *logisk argument* (i udsagnslogikken) forstås et skema af formen

$$\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \\ \hline V \end{array}$$

hvor $U_1, U_2, \cdots, U_n$ og V er udsagnsformer. U'erne kaldes argumentets *præmisser* og V kaldes argumentets *konklusion.* Det logiske argument siges at være *gyldigt,* hvis V er en logisk konsekvens af konjunktionen af U'erne, altså hvis

$$U_1 \wedge U_2 \wedge \cdots \wedge U_n \models V \, .$$

Vi ser altså, at det logiske argument er gyldigt, netop når det for enhver specifikation af de udsagnsvariable, der indgår i præmisserne og i konklusionen gælder, at såfremt alle præmisserne er sande, så er også konklusionen sand.

Læg mærke til, at vi også taler om et logisk argument i tilfælde, hvor det ikke er gyldigt. I så fald findes en specifikation, så alle præmisserne er sande, men konklusionen falsk.

Vi udnævner 5 særlig enkle gyldige logiske argumenter som "byggesten" for andre gyldige logiske argumenter. Tanken er den, at vi ved hjælp af disse byggesten – *udsagnlogikkens slutningsregler* – samt de tidligere fremhævede logiske ækvivalenser stiler efter at kunne afgøre om et vilkårligt logisk argument er gyldigt eller ej.

De 5 særlige regler er følgende:

UDSAGNLOGIKKENS SLUTNINGSREGLER

$$\text{SR1}: \quad \begin{array}{l} U \Rightarrow V \\ U \\ \hline V \end{array}$$

$$\text{SR2}: \quad \begin{array}{l} U \\ \hline U \vee V \end{array}$$

$$\text{SR3}: \quad \begin{array}{l} U \wedge V \\ \hline U \end{array}$$

$$\text{SR4}: \quad \begin{array}{l} U \\ V \\ \hline U \wedge V \end{array}$$

$$\text{SR5}: \quad \begin{array}{l} U \vee V \\ \neg U \vee R \\ \hline V \vee R \end{array}$$

At disse logiske argumenter alle er gyldige, checkes let efter (vedrørende SR 1, se §5, Eksempel 2)..

Slutningreglen SR 1 hedder *modus ponens* og slutningsreglen SR 5 kaldes *resolution.*

Definition. Lad

$$\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \\ \hline V \end{array}$$

være et logisk argument i udsagnskalkylen. Ved et *formelt bevis* for argumentet forstås en nummereret liste af udsagnsformer, der starter med præmisserne $U_1, \cdots, U_n$

og slutter med konklusionen V og er således indrettet, at enhver udsagnsform på listen fremkommer ved at anvende de udsagnslogiske identiteter samt slutningsreglerne SR 1-5 på udsagnsformer tidligere på listen. Desuden kræves, at det for hver udsagnsform på listen er angivet, hvordan den er fremkommet af tidligere udsagnsformer.

Det er klart, at formelle beviser kunne være defineret anderledes uden at det havde ført til noget væsentligt andet. Vi kunne have hæftet os ved at andre slutningsregler og andre identiteter. Vi har valgt et system, der gør det ret let at behandle forbindelsen mellem det semantiske og det syntaktiske. Derimod ligger vort valg ikke særlig tæt på sædvanlig praksis for bevisførelse. Hvis f.eks. vi i en speciel sammenhæng skal eftervise implikationen $A \Rightarrow B$, er det hyppigt mest nærliggende at ræsonnere i følgende trin: Lad mig antage, at A gælder; så må ... og ... gælde; ergo gælder B. Denne vigtige form for ræsonneren har vi ikke specielt lagt op til. Vi ønsker kun at belyse nogle fundamentale begreber og sammenhænge, ikke at give en udtømmende behandling af almindelig praksis i konkrete situationer. Derfor opfordres I til at fortsætte med at bruge "almindelig sund fornuft". Nok er det meningen, at betragtningerne her skal hjælpe jer, men hvis I insisterer på at jeres matematiske ræsonneren fra nu af udelukkende skal bygge på retningslinierne fra dette kursus, kommer I galt af sted!

Eksempel 1. Man kan let – via en sandhedstabel eller mere direkte – overbevise sig om gyldigheden af følgende logiske argument

$$\begin{array}{l} P \vee Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow S \\ \neg S \\ \hline \neg Q \end{array}$$

Vi skal nu føre et formelt bevis for argumentet. Med "UI" refereres til de udsagnslogiske identiteter, som blev nummereret i §5, og med "SR" til udsagnlogikkens slutningsregler. Her er beviset:

1.	$P \vee Q \Rightarrow R$	præmis
2.	$R \Rightarrow S$	præmis
3.	$\neg S$	præmis
4.	$\neg S \Rightarrow \neg R$	UI 13 på 2
5.	$\neg R$	SR 1 på 3 og 4
6.	$\neg R \Rightarrow \neg(P \vee Q)$	UI 13 på 1
7.	$\neg(P \vee Q)$	SR 1 på 5 og 6
8.	$\neg P \wedge \neg Q$	UI 15 på 7
9.	$\neg Q \wedge \neg P$	UI 2 på 8
10.	$\neg Q$	SR 3 på 9

I 10 genfinder vi den ønskede konklusion og beviset er ført.

Bemærk iøvrigt, at hvis de udsagnsvariable P, Q, R og S erstattes med vilkårlige udsagnsformer U, V, W og Z (tegn, der ikke er på vor liste af reserverede tegn over udsagnsvariable), kan betragtningerne ovenfor gennemføres på helt samme måde, og fører så til et formelt bevis for det logiske argument

$$\begin{array}{l} U \vee V \Rightarrow W \\ W \Rightarrow Z \\ \neg Z \\ \hline \neg V \end{array}$$

□

Det er klart, at *ethvert logisk argument, der har et formelt bevis, er gyldigt.* Overvej! Man anvender sprogbrugen, at det formelle bevis er et (formelt) *bevis for gyldigheden* af det logiske argument. Normalt er et formelt bevis noget mere uoverskueligt end et bevis på almindelig godt dansk, hvor vi blot bruger vor sunde fornuft. Tænk blot på eksemplet ovenfor!

Det er alligevel uhyre interessant at hæfte sig ved de formelle beviser. Herved får vi en mulighed for at præcisere den ingrediens i matematikken, nemlig beviset, der mere end nogen anden skiller matematik ud fra de andre videnskaber. Desuden er der andre grunde til at fremhæve det formelle bevis, bl.a. at dette peger på et moderne forskningsfelt i datalogi og matematik, der beskæftiger sig med konstruktion af programmer (algoritmer) til automatisk bevisførelse. Og naturligvis er det interessant, at alle ræsonnementer i udsagnslogikken kan baseres på ganske få slutningsregler og identiteter.

Vi kan lære meget mere med udgangspunkt i eksemplet og definitionen ovenfor. Tænker vi over det, indser vi nemlig, at vi med beviset for gyldigheden af det logiske argument i eksemplet har forladt vor semantiske betragtningsmåde. Det var på intet tidspunkt nødvendigt at tænke på en bestemt kontekst og bestemte specifikationer. Beviset var netop formelt, rent mekanisk, byggende på en bestemt *syntaks.* Syntaksen er givet med slutningsreglerne og de udsagnslogiske identiteter. Vi har dermed introduceret det syntaktiske lag i den matematiske logik.

Mange undersøgelser i logik går ud på at sammenholde det semantiske lag med det syntaktiske. Vi vil også skelne notationsmæssigt mellem disse lag, idet tegnet $\models$ (som hidtil) bruges til at udtrykke logisk konsekvens af semantiske grunde, mens $\vdash$ bruges til at udtrykke logisk konsekvens af syntaktiske grunde. Således udtrykker $(U_1 \wedge U_2 \wedge \cdots \wedge U_n) \models V$, at det logiske argument med $U_1, U_2, \cdots, U_n$ som præmisser og V som konklusion er gyldigt, mens $(U_1 \wedge U_2 \wedge \cdots \wedge U_n) \vdash V$ udtrykker, at der findes et formelt bevis for argumentet.

Læseren har sikkert allerede stillet sig et centralt spørgsmål: Vi udvalgte lidt tilfældigt nogle basale ækvivalenser og slutningsregler (UI 1–16 og SR 1–5), og definerede så et formelt bevis med reference hertil. Var det nu klogt? Har vi "glemt" nogle basale regler? Med andre ord, vi spørger om ethvert gyldigt logisk argument også kan begrundes med et formelt bevis efter vores definition. Det kan det:

Sætning. Ethvert gyldigt logisk argument i udsagnskalkylen har et formelt bevis.

Dette hovedresultat er ikke helt let at vise. Jeg skal uddele et tre-siders notat, der skitserer beviset (kan evt. gøres til genstand for et Mat Y-projekt).

Selvom vi altså viger tilbage for at bevise sætningen i hovedteksten, kan vi dog let angive en opskrift, der altid virker! Opskriften er ganske enkel:

- Erstat præmisserne med dermed ækvivalente udsagnsformer på konjunktiv normalform;
- Erstat hver præmis, nu skrevet på konjunktiv normalform, med de indgående klausuler (hertil udnyttes SR 3);
- Anvend resolution (og SR2) indtil man har fundet udsagnsformer, der er identiske med de klausuler, der indgår i den ønskede konklusion, skrevet på konjunktiv normalform.
- Indgår flere klausuler i konklusionen, anvendes tilsidst SR 4 til at "sammenstykke" hele konklusionen.

Eksempel 2. Vi vil give et formelt bevis for gyldigheden af følgende logiske argument:

1.	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$
2.	$T \Rightarrow Q$
3.	$W \Rightarrow P$
4.	$\neg R$
	$W \Rightarrow \neg T$

Anvendes metoden skitseret ovenfor, kan det formelle bevis forløbe ved tilføjelse af følgende udsagnsformer til præmisserne 1–4:

5.	$\neg(P \wedge Q) \vee R$	UI 12 på 1
6.	$\neg P \vee \neg Q \vee R$	UI 16 (og 3) på 5
7.	$\neg T \vee Q$	UI 12 på 2
8.	$\neg P \vee R \vee \neg T$	SR 5$(+\cdots)$ på 6 og 7
9.	$\neg W \vee P$	UI 12 på 3
10.	$R \vee \neg T \vee \neg W$	SR 5 $(+\cdots)$ på 8 og 9
11.	$\neg T \vee \neg W$	SR 5 $(+\cdots)$ på 4 og 10
12.	$W \Rightarrow \neg T$	UI 12 $(+\cdots)$ på 11 .

Bemærk, at når vi kan anvende resolution på 4 og 10 (se 11), skyldes det, at 4 kan skrives på formen $\neg R \vee 0$.

Da vi endte med den ønskede konklusion, har vi hermed ført formelt bevis for gyldigheden af det logiske argument. $\square$

Ofte står man sig ved beviset for gyldigheden af et argument at benytte et *indirekte bevis.* Dette svarer til, at det logiske argument

$$\frac{U}{V} \tag{8.1}$$

erstattes af det logiske argument

$$\begin{array}{c} U \\ \neg V \\ \hline 0 \end{array} \tag{8.2}$$

Grunden til fornuften heri skyldes følgende:

Sætning. *Lad U og V være udsagnsformer. Da gælder, at det logiske argument (2.1) er gyldigt, hvis og kun hvis det logiske argument (2.2) er gyldigt.*

Bevis. At argumentet 2.2 er gyldigt, betyder, at $(U \wedge \neg V) \Rightarrow 0 \equiv 1$. Tilsvarende for 2.1. Nu er

$$\begin{aligned} (U \wedge \neg V) \Rightarrow 0 &\equiv \neg(U \wedge \neg V) \vee 0 \\ &\equiv \neg U \vee V \vee 0 \\ &\equiv \neg U \vee V \\ &\equiv U \Rightarrow V \ , \end{aligned}$$

hvorfor $(U \wedge \neg V) \Rightarrow 0$ er en tautologi, hvis og kun hvis $U \Rightarrow V$ er det. Heraf følger påstanden. $\square$

Eksempel 3. Vi vil bevise gyldigheden af det logiske argument

$$\begin{array}{c} \neg(U \wedge W) \\ \neg\ V \Rightarrow W \\ \hline U \Rightarrow V\ . \end{array}$$

Negationen af den ønskede konklusion er $U \wedge \neg V$, der er på konjunktiv normalform med to klausuler. Disse føjes til præmisserne og vi søger at føre et formelt bevis for absurditeten ("nå til en modstrid", er vi vant til at sige):

1.	$\neg(U \wedge W)$	
2.	$\neg V \Rightarrow W$	
3.	U	
4.	$\neg V$	
5.	$\neg U \vee \neg W$	UI 16 på 1
6.	$V \vee W$	UI 11 og 12 på 2
7.	W	SR 1 på 2 og 4
8.	$\neg W$	SR 5 på 3 og 5
9.	0	SR 5 på 7 og 8 .

Vi er hermed, som ønsket, nået frem til absurditeten, og har ført det bebudede indirekte bevis. $\square$

En anden velkendt bevisform er *bevis ved kontraponering.* Her bytter præmis og konklusion plads efter negering. Denne bevisform bygger på at det logiske argument (8.1) er gyldigt, hvis og kun hvis det logiske argument

$$\frac{\neg V}{\neg U}$$

er gyldigt. At dette er tilfældet, ses direkte af UI 13.

Endnu en bevisform, der hyppigt kan anvendes er *opdeling i mulige tilfælde.* Den bygger på at det logiske argument

$$\begin{array}{r} T_1 \vee T_2 \vee \cdots \vee T_n \\ T_1 \Rightarrow V \\ T_2 \Rightarrow V \\ \vdots \\ T_n \Rightarrow V \\ \hline V \end{array} \tag{8.3}$$

er gyldigt. Ud fra præmisserne kan vi altså konkludere V. Se iøvigt Opgave 20.

For vilkårlige udsagnsformer U og V er det logiske argument

$$\begin{array}{c} U \\ \neg U \\ \hline V \end{array}$$

gyldigt. Hvis, derfor, en teori (kontekst) indeholder en modstrid (en udsagnsform, som er sand tillige med sin negation), så kan man bevise enhver påstand hørende til teorien. En sådan teori vil dermed være helt værdiløs.

9 Grundbegreber i prædikatkalkylen

Se på udtrykket "x er et primtal", hvor x betegner et naturligt tal. Der er intet unaturligt herved. Vi indser imidlertid, at et sådant simpelt udtryk ikke omfattes af udsagnslogikken. Det er ikke et konkret udsagn knyttet til konteksten $\mathbb{N}$. Så skulle det jo enten være sandt eller falskt – og det kommer jo an på, hvad x er, og til mange formål er det netop hensigtsmæssigt at give mulighed for at x kan være snart det ene, snart det andet tal.

Et andet eksempel: Se på udtrykket "$xy = 0$" knyttet til konteksten af reelle tal. Her optræder nu to ikke-specifiserede størrelser, x og y, og udtrykket "siger noget" om x og y. I det første eksempel "x er et primtal" siges noget om x.

Vi må udvide logikken til også at omfatte udtryk som ovenstående. Udtryk af den betragtede art kaldes *prædikater* eller *åbne udsagn* og de størrelser, prædikaterne "siger noget om" kaldes *individvariable.* I prædikatet "x er et primtal" er der én individvariabel, x. I prædikatet "$xy = 0$" er der to individvariable, x og y. Typisk reserverer vi $x, y, z, \cdots$ til at betegne individvariable.

Til enhver kontekst – der her bruges synonymt med model – hører en række prædikater, dels prædikater i én individvariabel, dels prædikater i to eller flere individvariable. Hvorledes disse prædikater dannes rent sprogligt syntaktisk (ud fra "atomiske udtryk" som f.eks. "$x = y$", "$x \in y$", "$x = 0$" eller, hvad det nu kan være i en given kontekst), skal vi ikke hæfte os nærmere ved, bortset fra to nyskabelser.

Tænk på en bestemt kontekst og et bestemt prædikat $P(x)$ i den ene individvariable x. Hermed menes, at vi til ethvert objekt i universet hørende til den givne kontekst har knyttet et udsagn (der så enten er sandt eller falskt). Er objektet x, betegner $P(x)$ netop dette udsagn. Vi tænker os nu, at vi for ethvert objekt x i universet undersøger, om udsagnet $P(x)$ er sandt. Efter denne undersøgelse træder vi et skridt tilbage og ser på resultatet. Er ethvert af udsagnene $P(x)$ sandt, udtrykker dette en egenskab knyttet til konteksten. Er det ikke rigtigt, at ethvert af udsagnene $P(x)$ er sandt, gælder denne egenskab ikke. Egenskaben er faktisk et udsagn. Dette udsagn har en ganske bestemt betegnelse i logikken, nemlig $\forall x P(x)$ og læses "for alle x gælder $P(x)$".

Ovenstående beskrivelse af betydningen af et nyt udsagn som $\forall x P(x)$ var knyttet til en fiktiv (tænkt) undersøgelse af alle udsagnene $P(x)$. Normalt kan en sådan undersøgelse ikke gennemføres. Det væsentlige er, at vi insisterer på, at der til ethvert prædikat $P(x)$ i én individvariabel hørende til en bestemt kontekst er knyttet et bestemt udsagn, og at dette opfører sig som beskrevet, dvs. hvis alle $P(x)$ er sande, så er udsagnet sandt, og er udsagnet sandt, så er alle $P(x)$ sande. Dette udtrykkes i to vigtige slutningsregler. Før vi nævner dem, indfører vi endnu et udsagn knyttet til prædikatet $P(x)$. Det nye udsagn betegnes $\exists\, xP(x)$, evt. $\exists\, x : P(x)$, og læses "der findes x så $P(x)$". Tanken er den, at mens vi for gyldigheden af $\forall\, xP(x)$ krævede, at vor undersøgelse af udsagnene $P(x)$ resulterede i at de alle var sande, kræver vi nu blot at der findes et x, så $P(x)$ er sand.

I prædikatkalkylen har vi brug for følgende fire slutningsregler udover de fem slutningsregler, der knytter sig til udsagnskalkylen. Tegnene "$\forall$" og "$\exists$" kaldes *kvantorer,* hhv. *al-kvantoren* og *eksistens-kvantoren.* Hyppigt bruges de i forbindelse med prædikater i flere individvariable, og hyppigt bruges de i kombinationer, hvor også konnektiverne fra udsagnslogikken forekommer. Meningen med alle de udtryk, der derved kan forekomme er egentlig klar, og vi skal ikke give en systematisk fremstilling heraf. Lad os i stedet se nogle eksempler.

SR 6 (*universel specifikation,* US):

$$\frac{\forall\, xP(x)}{P(a) \text{ for alle } a \text{ i universet}}$$

SR 7 (*universel generalisation,* UG):

$$\frac{P(a) \text{ for alle } a \text{ i universet}}{\forall\, xP(x)}$$

SR 8 (*eksistentiel specifikation,* ES):

$$\frac{\exists xP(x)}{\text{der findes } a \text{ i universet, så } P(a)}$$

SR 9 (*eksistentiel generalisation,* EG):

$$\frac{\text{der findes } a \text{ i universet, så } P(a)}{\exists\, xP(x)}$$

Eksempel 1. Se på udtrykkene

1. $\forall\, xP(x, y)$
2. $\exists\, x\forall\, yP(x, y, z)$

3. $P \wedge \forall\, x Q(x)$

4. $\forall\, x\,(P(x) \Rightarrow Q(x,y)) \wedge (\exists\, y Q(x,y))$

Bemærk, at kun 3 betegner et udsagn. 1 er et prædikat i individvariablen y, idet det jo siger noget om y (nemlig at for alle x gælder $P(x,y)$), og 2 er et prædikat i individvariablen z. Udtrykket 4 er måske mere uklart. Det er faktisk et prædikat i y. Meningen med det træder klarere frem, når vi skriver det på formen

$$\forall\, x\,(P(x) \Rightarrow Q(x,y)) \wedge (\exists\, z Q(x,z)) \ .$$

I 4 havde vi valgt et uhensigtsmæssigt navn for individvariablen knyttet til eksistenskvantoren. Måske bliver meningen med 4 først klar, når vi indfører betegnelsen $R(x)$ for prædikatet $\exists\, y Q(x,y)$. Så kan 4 skrives på formen

$$\forall\, x\,(P(x) \Rightarrow Q(x,y)) \wedge R(x)$$

□

I forbindelse med udtryk som ovenstående taler man om at individvariablene er *bundne* eller *fri*. De bundne variable er bundet af den kvantor, de hører til. Igen må nogle eksempler være nok til at forklare meningen.

Eksempel 2. I 1 er x bundet (af alkvantoren) og y er fri. Derfor er 1 et prædikat i y.

I 2 er x og z frie i udtrykket $\forall\, y P(x,y,z)$, mens y er bundet af al-kvantoren. Da x er bundet af den yderste eksistens-kvantor, er hele udtrykket et prædikat i z.

Da x er bundet i 3, og der ikke er andre individvariable, er 3 et udsagn (et prædikat i nul variable).

Se på 4: Her er y bundet i udtrykket $\exists\, y\, Q(x,y)$, men da det første y er fri, er hele udtrykket et prædikat i y. □

Ganske tilsvarende til forholdene i udsagnskalkylen, hvor vi skelnede mellem udsagn, udsagnsvariable og udsagnsformer, må vi i prædikatkalkylen skelne mellem *prædikater, prædikatvariable* og *prædikatformer.* Lad os kort præcisere: Prædikater er det, vi har haft i tankerne ovenfor. Det er åbne udsagn hørende til en bestemt kontekst. For at få et udsagn ud fra et prædikat kræves specifikation af de til prædikatet hørende individvariable.

Prædikatvariable har vi ikke nævnt før. Det er reserverede tegn eller tegnstrenge, f.eks. $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x_1,x_2)$, $Q(x), \cdots$ som ikke i sig selv har en fast betydning. Det får de først ved specifikation. F.eks. for $P(x)$ er tanken, at vi kan specificere en kontekst som vi vil, og derefter kan vi specifisere et prædikat i x hørende til konteksten. Så har vi et (konkret) prædikat. Skal vi have et udsagn frem, må vi yderligere specificere, hvilket objekt i universet, x skal være.

Prædikatformer dannes ud fra prædikatvariable (de indgående prædikatvariable) ved brug af kvantorer og konnektiver, som beskrevet før. En fuld specifikation af en prædikatform, så vi når frem til et udsagn, kræver specifikation af en kontekst (skal være den samme for alle indgående prædikatvariable), specifikation af prædikater for hver prædikatvariabel (med det rigtige antal individvariable) og endelig kræves spcifikation af alle frie variable.

Kvantisering er altid over hele universet, dvs. i udtrykkene $\forall\, x P(x)$ og $\exists\, x P(x)$ "løber" x over objekterne i universet. Denne forestilling afspejles i definitionerne (indeholdt i SR 6–9). Tit kan det dog være bekvemt at tillade "delkvantisering". Skriver vi f.eks. $\forall\, x$ så $S(x) : P(x)$ skal dette tolkes derhen, at x nu kun "løber" over de objekter for hvilke $S(x)$ er sand. Mere præcist skal $\forall\, x$ så $S(x)$: $P(x)$ betyde det samme som $\forall\, x(S(x) \Rightarrow P(x))$. Og $\exists\, x$ så $S(x)$: $P(x)$ skal betyde $\exists\, x : S(x) \wedge P(x)$. Delkvantisering er velkendt fra analysen ($\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0 \cdots$ eller konstruktioner som denne: $\exists\, n_0 \forall\, n \geq n_0 \cdots$).

Vi kan nu udvide de centrale begreber fra udsagnskalkylen til prædikatkalkylen. Således siges to prædikatfomer $P(x, y, \cdots, w)$ og $Q(x, y, \cdots, w)$ at være *ækvivalente,* og vi skriver $P(x, y, \cdots, w) \equiv Q(x, y, \cdots, w)$, såfremt enhver specifikation fører til en sand biimplikation $P(x, y, \cdots, w) \Leftrightarrow Q(x, y, \cdots, w)$. Tilsvarende defineres logisk *konsekvens,* for hvilken vi bruger samme symbol som i udsagnslogikken, altså skrives $P(x, y, \cdots, w) \models Q(x, y, \cdots, w)$. Mere elegant kan vi først udvide begrebet en *tautologi* til at betegne en prædikatform, der er sand ved en vilkårlig specikation, og så definere ækvivalens og konsekvens ved $P(x, \cdots, w) \equiv Q(x, \cdots, w)$, hvis og kun hvis $P(x, \cdots, w) \Leftrightarrow Q(x, \cdots, w)$ er en tautologi, og ved $P(x, \cdots, w) \models Q(x, \cdots, w)$, hvis og kun hvis $P(x, \cdots, w) \Rightarrow Q(x, \cdots, w)$ er en tautologi. Da vi som i udsagnslogikken ikke ønsker at skelne mellem ækvivalente prædikatformen, bruges 1 til at betegne tautologien (en vilkårlig tautologi) og 0 til at betegne absurditeten (negationen til 1).

Et *logisk argument* og et *gyldigt logisk argument* i prædikatlogikken defineres helt i analogi til definitonerne i udsagnslogikken. En væsentlig forskel, når vi sammenligner med udsagnslogikken, er, at vi ikke har mulighed for at benytte os af sandhedstabeller eller andre "primitive" værktøjer. I prædikatlogikken er det typisk en vanskeligere opgave at eftervise gyldigheden af et logisk argument.

Som hjælp til denne opgave har vi dels alle de tidligere udviklede relationer, dels nogle nye relationer. Hvad angår de gamle relationer (ækvivalenserne UI 1–16 og slutningsreglerne SR 1–5), er det vigtigt at påpege, at de bevarer deres gyldighed i udvidet form, idet de indgående udtryk nu kan være vilkårlige prædikatfomer (substitutionsprincippet anvendes).

Af nye relationer, har vi allerede nævnt de nye slutningsregler, vi vil hæfte os ved (SR 6–9). Desuden fremhæver vi relationerne nedenfor:

NOGLE PRÆDIKATLOGISKE ÆKVIVALENSER	
1.	$\neg\forall\, x P(x) \equiv \exists\, x \neg P(x)$
2.	$\neg\exists\, x P(x) \equiv \forall\, x \neg P(x)$
3.	$(\forall\, x P(x)) \wedge (\forall\, x Q(x)) \equiv \forall\, x\, (P(x) \wedge Q(x))$
4.	$(\exists\, x P(x)) \vee (\exists\, x Q(x)) \equiv \exists\, x\, (P(x) \vee Q(x))$

NOGLE PRÆDIKATLOGISKE KONSEKVENSER	
5.	$\forall\, x P(x) \vdash \exists\, x P(x)$
6.	$(\forall\, x P(x)) \vee (\forall\, x Q(x)) \vdash \forall\, x\, (P(x) \vee Q(x))$
7.	$\exists\, x\, (P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists\, x P(x)) \wedge (\exists\, x Q(x))$

Vi skal henvise beviserne for disse relationer til øvelserne (det er ikke svært!).

Begrebet *formelt bevis* udvides til prædikatlogikken, idet SR 1–9 tages som slutningsregler og UI 1–16 samt 1–4 ovenfor udgør vort reservoir af ækvivalenser.

Bemærk, at vi nu i nogen grad har opgivet strengt at reservere visse symboler til prædikatvariable. $P(x)$ og $Q(x)$ oven for kan faktisk stå for vilkårlige prædikatformer. Endnu en bemærkning er værd at gøre sig: Såfremt $P(x)$ og $Q(x)$ ovenfor erstattes af prædikatformer med yderligere individvariable, f.eks. $P(x, y, \cdots, w)$ og $Q(x, y, \cdots, w)$, så kan relationerne ovenfor stadig opretholdes. Så kommer relationerne blot til at vedrøre prædikatformer i individvariablene $y, \cdots, w$.

Ganske som i udsagnslogikken er det klart, at ethvert logisk argument i prædikatlogikken, der har et formelt bevis, er gyldigt. Det omvendte gælder også, men beviset er noget omstændeligt, og vi skal ikke komme ind herpå. Faktisk er man tvunget til mere detaljeret at præcisere påstanden. Præcis hvordan er prædikatformerne bygget op? Præcis hvordan defineres frie og bundne variable? Først med sådanne præciseringer giver det mening at kaste sig over problemet. Der henvises til fremstillinger af matematisk logik.

Resultatet, at ethvert gyldigt argument i prædikatlogikken har et formelt bevis, omtales også som *prædikatlogikkens fuldstændighed.* Det tilsvarende resultat for udsagnslogikken, som faktisk bevises i Appendix, udtrykker *udsagnslogikken fuldstændighed.* Et svagere, men allerede meget fint resultat.

For prædikatlogikkens fuldstændighed er det vigtigt, at vi her taler om *1.te ordens logik,* hvor kvantisering sker over objekter i universet. Tillader man mere generel kvantisering (2.den og højere ordens logik) gælder fuldstændighedsresultatet ikke længere. I stedet gælder de fundamentale *ufuldstændighedssætninger,* der har gjort Gödel's navn udødeligt. Hvor spændende dette end er, slutter vi her. Til den der vil vide mere, uden dog at kaste sig over den meget tekniske speciallitteratur, henvises til de sidste afsnit af Brandt og Nissen: Q.E.D. (se litteraturlisten). Desuden kan Burris' bog tilføjet til Litteraturlisten være nyttig.