Beregning af bestemt integrale ved partiel integration og integration ved substitution:

af John V. Petersen

1 Partiel integration

2 Integration ved substitution

1 Beregning af bestemt integrale ved partiel integration:

Opgave 1: Beregn den eksakte værdi af $\int_1^2 (x+1)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$

Vi har et produkt af to funktioner: $(x+1)\cdot\ln(x)$

Lad $f(x) = (x+1)$ og $g(x) = \ln(x)$

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$: $F'(x) = f(x)$

Lad os tage udgangspunkt i produktet $F(x)\cdot g(x)$

$$(F(x)\cdot g(x))' = F'(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)$$

$$= f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)$$

dvs. $F(x)\cdot g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)$

da $(F(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)$

Vi omytter højre og venstre side af ligningen:

$$f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x) = (F(x)\cdot g(x))'$$

og integrerer på begge sider med grænserne a og b.

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x))\,\mathrm{d}x = [F(x)\cdot g(x)]_a^b \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))\,\mathrm{d}x + \int_a^b (F(x)\cdot g'(x))\,\mathrm{d}x = [F(x)\cdot g(x)]_a^b \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))\ \mathrm{dx} = [F(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b (F(x)\cdot g'(x))\ dx$$

Vi har nu sætning 1:

Partiel integration af bestemt integrale:

Lad f være en kontinuert funktion, der har F som stamfunktion, og lad g være en differentiabel funktion. Da er

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))\ \mathrm{dx} = [F(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b (F(x)\cdot g'(x))\ dx$$

Vi skal nu bruge sætningen:

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))\ \mathrm{dx} = [F(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b (F(x)\cdot g'(x))\ dx \quad (*)$$

til at løse opgaven: $\int_1^2 (x+1)\cdot\ln(x)\ \mathrm{d}x$

Vi vælger så den funktion der er nemmest at integrere:

dvs. $f(x) = (x+1) \quad og \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$

$g(x) = \ln(x)\ er\, jo\, nem\, at\, differentiere:\ g'(x) = \frac{1}{x}$

Vi indsætter nu i $(*)$:

$$\int_1^2 (x+1)\cdot\ln(x)\ \mathrm{d}x = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\cdot\ln(x)\right]_1^2 - \int_a^b \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\cdot\frac{1}{x}\ dx$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\cdot\ln(x)\right]_1^2 - \int_a^b \left(\frac{1}{2}\cdot x + 1\right) dx$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\cdot\ln(x)\right]_1^2 - \left[\frac{1}{4}x^2 + x\right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) \cdot \ln(x) - \left(\frac{1}{4} x^2 + x \right) \right]_1^2$$

$$= 4 \cdot \ln(2) - 3 - \left(\frac{3}{2} \cdot \ln(1) - \frac{5}{4} \right)$$

$$= 4 \cdot \ln(2) - 3 + \frac{5}{4} = 4 \cdot \ln(2) - \frac{7}{4}$$

$\displaystyle \int_1^2 (x+1) \cdot \ln(x) \, dx = 4 \cdot \ln(2) - \frac{7}{4}$ **, er den eksakte løsning.**

som tilnærmet er: ≈ 1.02259

Vi gør prøve. Den fundne stamfunktion er :

$$H(x) = \left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) \cdot \ln(x) - \left(\frac{1}{4} x^2 + x \right)$$

$$H'(x) = \left(\left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) \cdot \ln(x) - \left(\frac{1}{4} x^2 + x \right) \right)' =$$

$$(x+1) \cdot \ln(x) + \left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) \cdot \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{2} x + 1 \right) =$$

$(x+1) \cdot \ln(x)$ ***OK***

- -

Her er et plot af løsningen:

> $f := x \rightarrow (x+1)\cdot\ln(x);$

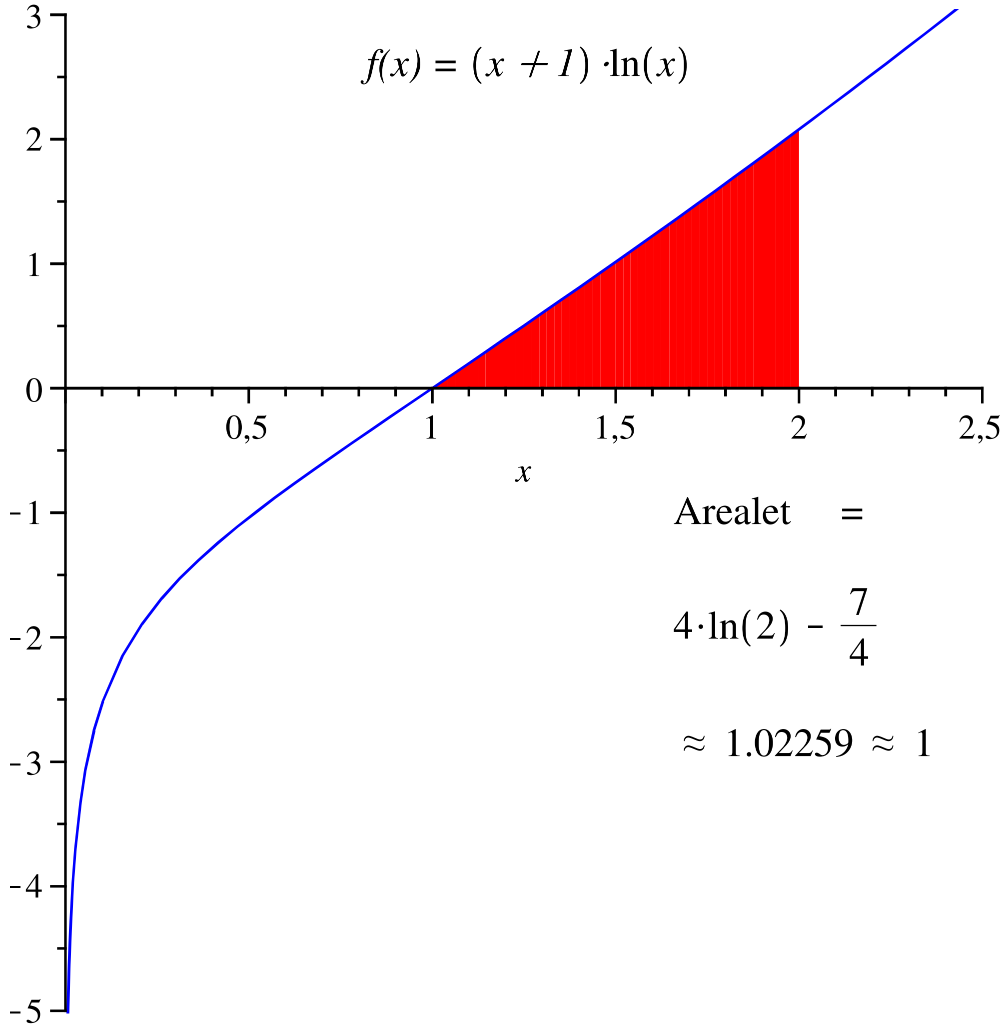
$$f := x \rightarrow (x+1)\ \ln(x) \tag{1}$$

> $with(plots):$

> $A := plot(f(x), x = 0..2.5, view = [0..2.5, -5..3], color = blue):$

> $B := plot(f(x), x = 1..2, view = [0..2.5, -5..3], filled = true):$

> $display(A, B);$



2 Beregning af bestemt integrale ved integration ved substitution:

Denne opgave løses på en måde, så metoden "integration ved substitution" samtidig indføres og forklares

Opgave 2: Beregn den eksakte værdi af $\int_0^1 (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx$

Det er ikke lige til at finde en stamfunktion til funktionen $(x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}$

Derfor vil vi her benytte integration ved substitution. Når man skal finde stamfunktioner til sammensatte funktioner, kan det nogle gange gøres ved denne metode.

Vi ser først på det ubestemte integrale: $\int (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx$

Vi sætter $x^2+2\cdot x+1 = g(x)$.

$g(x)$ *er den* "indre funktion" *i den sammensatte funktion* $f(g(x)) = e^{x^2+2\cdot x+1}$

$g(x) = x^2+2\cdot x+1 \Rightarrow g'(x) = 2\cdot x+2 = 2\cdot(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot g'(x) = (x+1)$

Og $f(t) = f(g(x)) = e^{x^2+2\cdot x+1}$, $t = g(x)$

Nu har vi: $\int (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx =$

$$\int e^{x^2+2\cdot x+1}\cdot(x+1)\,dx = \int f(g(x))\cdot\frac{1}{2}\cdot g'(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$$

dvs. $\int (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$

Bemærk, at $f(g(x))$ *bliver multipliceret med den afledede af den indre funktion* $g(x)$:
Det er bl.a. den sammenhæng man skal lægge mærke til ved et integrale,
hvis man vil bruge substitution.

Nu vil jeg opskrive sætningen om integration ved substitution, og derefter få det hele til at se mere meningsfuldt ud:

> Sætning 2: Integration ved substitution
>
> Lad f være en kontinuert funktion, der har F som stamfunktion, og lad g være en differentiabel funktion. Da er
>
> $$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + c = F(g(x)) + c \quad , \textit{ hvor } t = g(x)$$

t indføres som ny integrationsvariabel på en enkel og fornuftig måde. Se udregningerne nedenfor:

Vi substituerer med værdierne til højre:

$$\int (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx =$$

$$\int e^{x^2+2\cdot x+1}\cdot (x+1)\,dx =$$

$$\int e^t \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int e^t\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\cdot e^t + c = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2+2\cdot x+1} + c$$

Ovenfor så vi, at $t = g(x) = x^2 + 2\cdot x + 1 \quad \Rightarrow$

$$\frac{dt}{dx} = g'(x) = 2\cdot x + 2 = 2\cdot(x+1) \quad \Rightarrow$$

$$dt = 2\cdot(x+1)\,dx \quad \Rightarrow$$

$$(x+1)\,dx = \frac{1}{2}\,dt$$

$<---$ (*vi substituerer tilbage med* $g(x)$)

Nu har vi samlet, at $\int (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2+2\cdot x+1} + c$

Vi gør prøve. Hvis $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$: $F'(x) = f(x)$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot e^{x^2+2\cdot x+1} + c\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x^2+2\cdot x+1}\right)\cdot(2\cdot x+2) = (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1} \quad \textbf{\textit{OK}}$$

$$\int_0^1 (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\left(e^4 - e^1\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^4 - e\right)$$

Så den eksakte værdi af integralet $\int_0^1 (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(e^4 - e\right)$

En tilnærmet værdi er: $\frac{1}{2}\cdot(e^4 - e) \approx 25.9399$, dvs. ca. 26

Nu vil jeg indføre sætningen om integration ved substitution for bestemte integraler,

og så udføre integrationen kort og enkelt.

Pga. alt forarbejdet skulle det gerne være noget nemmere at forstå, end hvis jeg blot var startet med at gøre nedenstående:

Sætning 3: Integration ved substitution, for bestemte integraler:

Lad f være en kontinuert funktion, der har F som stamfunktion, og lad g være en differentiabel funktion. Da er

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = [F(g(x))]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$hvor\;\; t = g(x)$$

Vi indsætter nu blot i Sætning 3:

$$\int_0^1 (x+1)\cdot \mathrm{e}^{x^2+2\cdot x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\int_1^4 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\,\mathrm{e}^t\,\right]_1^4 =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^4 - e\right)$$

Fra tidligere ved vi, at

$$t = g(x) = x^2 + 2\cdot x + 1$$

og dermed:

$$(x+1)\,dx = \frac{1}{2}\,dt$$

Desuden får vi nemt de nye grænser $g(a)$ *og* $g(b)$:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; g(0) = 0^2 + 2\cdot 0 + 1 = 1$$

$$x = 1 \;\Rightarrow\; g(1) = 1^2 + 2\cdot 1 + 1 = 4$$

$$\int_0^1 (x+1)\cdot \mathrm{e}^{x^2+2\cdot x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^4 - e\right)$$

> $f := x \rightarrow (x+1) \cdot e^{x^2+2 \cdot x+1};$

$$f := x \rightarrow (x+1)\, e^{x^2+2x+1} \tag{2}$$

> $with(plots):$

> $A := plot(f(x), x=-1..1.11, view=[-1..2, 0..200], color=blue):$

> $B := plot(f(x), x=0..1, view=[-1..2, 0..200], filled=true):$

> $display(A, B);$