9 Differentialligninger

Linjeelementer

Differentialligningen

(1) $$y' = -\frac{x}{y}$$

kan tolkes således, at den i ethvert punkt (x_0,y_0), giver oplysning om tangenthældningen α for en eventuel løsningskurve gennem dette punkt.

Kaldes løsningskurven for f, gælder

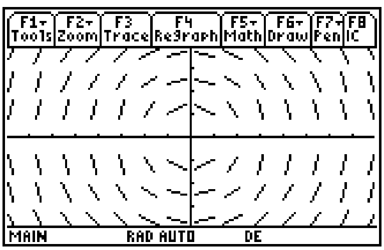
$$f(x_0) = y_0 \quad og \quad f'(x_0) = \alpha$$

Dette udtrykkes ved, at f går igennem *linjeelementet* $(x_0,y_0;\alpha)$. Fx vil løsningskurven gennem punktet (2,1) have tangenthældningen $\alpha = -2$, med andre ord, vil løsningskurven gå gennem linjeelementet (2,1;–1).

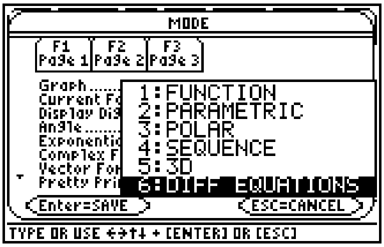
Vi benytter ordet *løsningskurve* som betegnelse for grafen for en løsning.

For at kunne danne sig et indtryk af løsningskurvernes forløb, kan man tegne nogle linjeelementer ind i et koordinatsystem:

Går løsningskurven gennem linjeelementet $(x_0,y_0;\alpha)$, tegnes gennem punktet (x_0, y_0) et lille linjestykke med hældningen α. Nedenfor ses en række linjeelementer tegnet for differentialligningen (1):



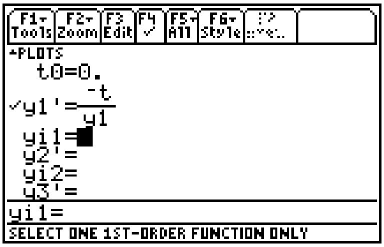
Du vil nu se, hvordan vi får grafregneren til at tegne disse linjeelementer. Tast [MODE] og vælg `DIFF EQUATIONS` i `Graph`-indstillingen:



Gå ind i [Y=]-editoren, der har ændret udseende. Nu hedder funktionerne `y1`, `y2`, ... , `y99` og den uafhængige variabel hedder `t`. Med disse betegnelser, skal differentialligningen (1) indtastes i `y1'` som `-t/y1`:

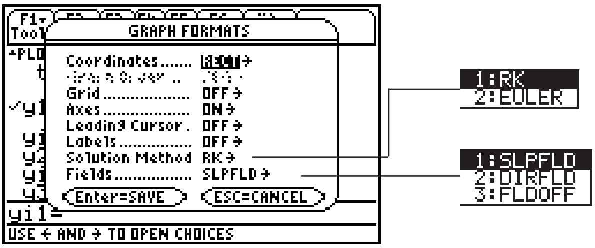
I `yi1` står `i`'et for *initial condition* - dvs. begyndelses-betingelse.

`DE` i statuslinjen viser, at Graph mode er valgt til `DIFF EQUATIONS`



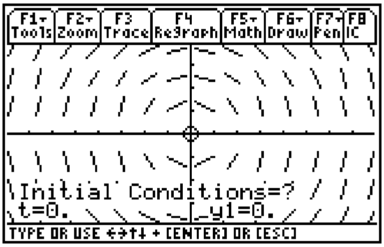
Tast [F1] 9 for at åbne `Graph Formats` menuen. Her er indstillingerne `Solution Method` og `Fields` nye. Behold standardindstillingerne for disse `RK` og `SLPFLD`.

Tip
Du kan benytte genvejstasterne:
Voyage 200: [◆] F
TI-89 Titanium: [◆][|]



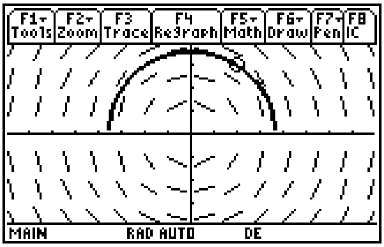
Vælg [F2] 4 (`ZoomDec`), og linjeelementerne tegnes.

Du kan tegne specifikke løsningskurver ved at vælge menupunktet `IC`, hvor `IC` står for Initial Condition (begyndelsesbetingelse). Tast [F8], og følgende skærmbillede kommer frem

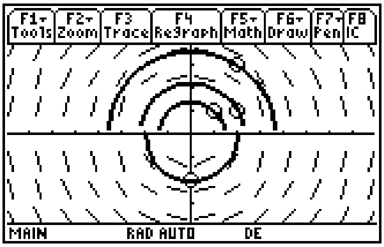


Vil du fx se løsningskurven gennem (2,3), indtastes 2 [ENTER] 3 [ENTER]:

Med de valgte indstillinger, deles skærmbilledet op i 14 eller 20 søjler (afhængig af model) og midt i disse søjler tegnes linjeelementer med passende mellemrum. Antallet af søjler styres af variablen `fldres`, der indstilles i `Window`.

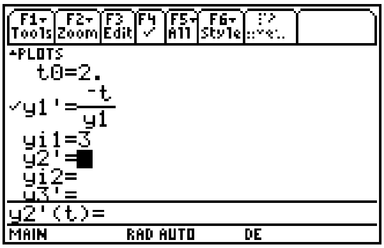


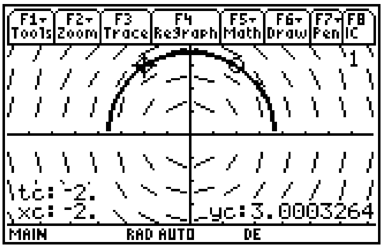
Ved gentagen anvendelse af `IC`, kan du tegne alle de løsningskurver, du måtte ønske. Ved at eksperimentere lidt med dette, ser du, at alle løsningskurver bliver halvcirkler med centrum i origo, og at ingen løsningskurve skærer x-aksen — prøv fx at vælge (2,0) som begyndelsesbetingelse.



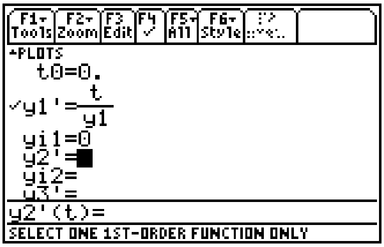
[F3] (Trace) virker ikke, når løsningskurverne laves med `IC`. Indsættes begyndelsesbetingelsen derimod i [Y=]-editoren, virker det fint:

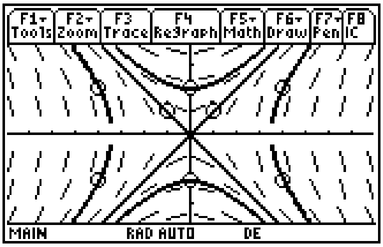
Der kan tegnes flere løsningskurver vha. `IC`, men kun den ene, der er fastlagt i [Y=]-editoren kan Traces.





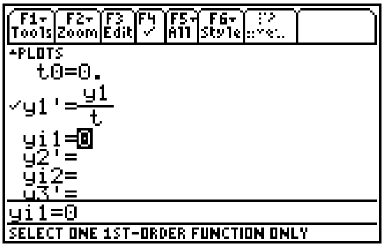
Du skal se på et par eksempler mere. Du kan nøjes med at at lave nogle små ændringer i det, du allerede har. Først fjerner du minus:

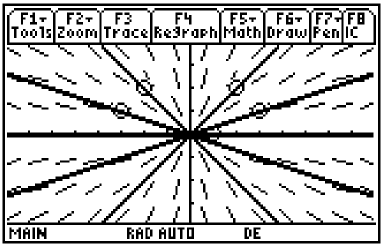




Her ser du, at løsningerne bliver hyperbler med asymptoterne $y = \pm x$. Disse linjer er i øvrigt også selv løsninger.

Byttes om på `t` og `y1`, bliver løsningskurverne er rette linjer gennem origo:





Eksempel : Faldskærmsudspring

Et faldskærmsudspring sker fra 4000 meters højde og faldskærmen udløses først i 1500 meters højde. Den maksimale fart, der opnås, er 50 m/s.

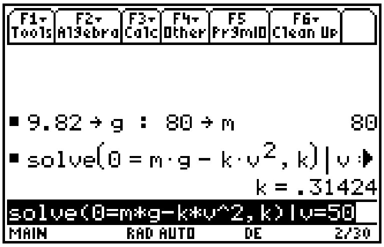
I denne situation gælder kraftligningen

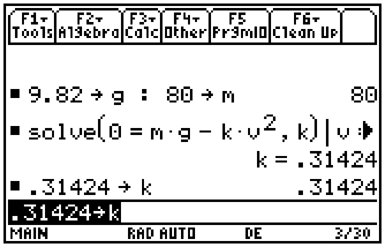
$$m \cdot v' = m \cdot g - k \cdot v^2$$

hvor v er hastigheden til tiden t, m er massen, g = 9.82 m/s^2 er tyngden og k en konstant, der bl.a. afhænger af form og størrelse af den faldende genstand.

Antag, at m = 80 kg. Når den maksimale fart (50 m/s) nås, er v' = 0. Ved indsættelse af dette i kraftligningen fås k = 0.31424 kg/m:

OBS
Alle beregninger foretages uden enheder.

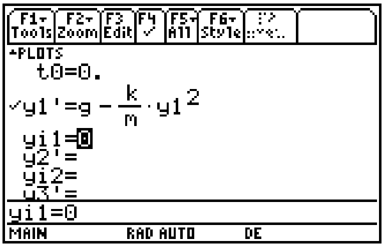




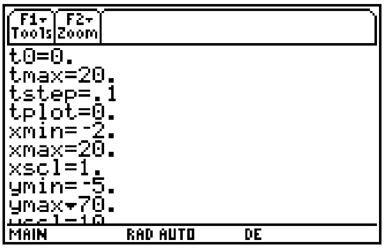
Omformet til en differentialligning i TI-89 Titanium / Voyage 200 syntaks bliver kraftligningen (divider med *m* på begge sider og skriv `y1` istedet for *v*):

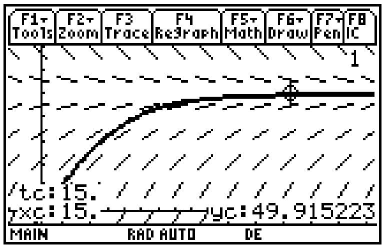
`y1'=g-k/m*y1^2`

Denne indtastes i [Y=]-editoren sammen med begyndelsesbetingelsen `tØ=Ø` og `yi1=Ø` — idet hastigheden er 0 ved udspringets start.



Nedenfor ses vinduesindstillingen og løsningskurven gennem (0,0) sammen med linjeelementer:





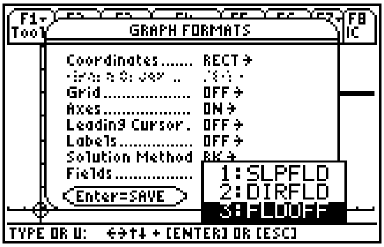
I grafbilledet er Trace aktiveret. Her kan du se, at løsningskurven nærmer sig asymptotisk til 50 og at tophastigheden nås efter ca. 15 sek.

Husk
Du kan benytte genvejstasterne:

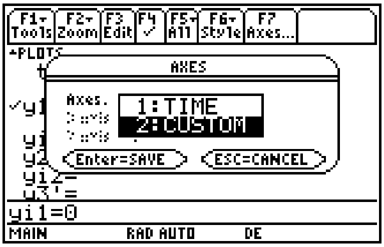
Voyage 200: [◆] F
TI-89 Titanium: [◆][|]

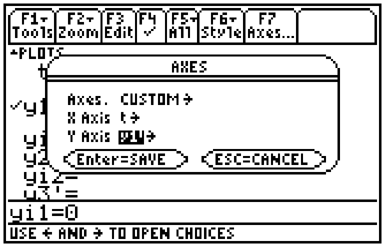
i grafskærmen for at åbne indstillingerne `Graph Formats`

Tast [F1] 9 for at åbne `Graph Formats` menuen, og slå linjeelementerne fra ved at vælge indstillingen `FLDOFF` i `Fields`:

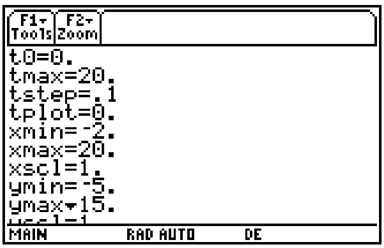


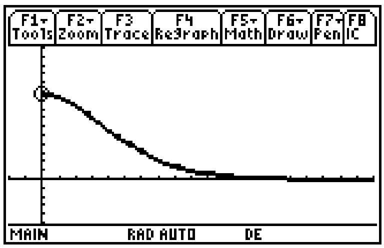
Gå til [Y=]-editoren, og vælg akser vha. [F7] `Axes...`, så er der pludselig nye muligheder. Skift til `CUSTOM` akser og indstil som vist nedenfor:





Med denne indstilling kan du se, hvordan accelerationen (`y1'`) afhænger af tiden (vinduesindstillingerne er også vist):





Ryd op!
I grafvinduet taster du [F1] 9. I Fields vælger du `FLDOFF`
I [Y=]-editoren indstiller du akser med [F7] `Axes...`

Vælges `t` og `y1` som akser, får vi tegnet hastigheden som funktion af tiden — men denne gang uden linjeelementer.

Aktiviteter

1: Isokliner

En isoklin er en kurve tegnet gennem de punkter, hvor løsningerne til en differentialligning har samme hældning — dvs. punkter, hvor y' er konstant.

Isoklinerne for differentialligningen $y' = x + y$ er således bestemt ved en ligning på formen $x + y = k$, dvs. rette linjer med hældning -1.

a) Tegn linjeelementer for $y' = x + y$ på grafregneren.

b) Tegn en række isokliner for $y' = x + y$ sammen med linjeelementerne. Det gør du ved at indtaste fx

```
DrawFunc 1-x
```

i hovedskærmens indtastningslinje.

Tegn nogle løsningskurver. En af isoklinerne er løsning. Hvilken? Det er iøvrigt noget som sjældent sker.

c) Den lineære løsningskurve deler så at sige vandene: Over, har alle løsningskurver et minimum og under, er alle løsningskurver aftagende. Forklar dette. Hvor antager alle "øvre" løsningskurver deres minimum?

d) Med en vis ret, kan den lineære løsningskurve til $y' = x + y$ kaldes *frastødende*.

Tegn linjeelementer og find lineære løsninger til differentialligningerne

$$y' = x - y\,, \quad y' = -x + y\,, \quad y' = -x - y$$

og retfærdiggør begreberne frastødende/tiltrækkende.

e) Tegn linjeelementer for $y' = y^2 - x$ og et passende antal løsningskurver. Findes der tiltrækkende/frastødende kurver her? *(Vink: Se på 0-isoklinen)*

2: Logistisk vækst med jagt/fiskeri

Som eksempler på anvendelser af differentialligninger kan vi se på vækstmodeller. Den logistiske vækst, her eksemplificeret ved

$$y' = 2y - \tfrac{1}{2}y^2$$

er et godt udgangspunkt.

a) Tegn linjeelementer og tegn nogle typiske løsningskurver. Find de stationære (dvs. konstante) løsninger og marker, hvilken der er tiltrækkende og hvilken der er frastødende.

b) Hvis der inkluderes jagt/fiskeri i modellen kan det gøres simpelt ved at trække en konstant fra:

$$y' = 2y - \tfrac{1}{2}y^2 - a$$

konstanten repræsenterer da den hastighed, hvormed der skydes/fiskes i populationen.

Lav billeder af typiske løsningskurver for a = 3/2 og a = 3.

Angiv de stationære løsninger i tilfældet a = 3/2 og marker, hvilken der er tiltrækkende og hvilken der er frastødende.

Forklar, hvorfor der ikke kan være stationære løsninger i tilfældet a = 3. Bestem den kritiske værdi af a (1 dec.), hvor de stationære løsninger forsvinder, og gør rede for, hvilke konsekvenser det har for populationen, hvis jagten/fiskeriet overstiger den kritiske værdi.

3) Hvis der inkluderes sæsonsvingninger i modellen, kan differentialligningen fx ændres til denne:

$$y' = (2 + \cos(x))y - \tfrac{1}{2}y^2 - a$$

Lav nogle løsningskurver for tilfældet a = 1. De konstante løsninger forsvinder, men i stedet dukker der nogle "periodiske" løsninger op, hvor den ene er tiltrækkende og den ande er frastødende.

Lav også nogle løsningskurver for tilfældet a = 2, og forklar, hvorfor der ikke kan være periodiske løsninger i dette tilfælde.

Find gennem eksperimenter den kritiske værdi af a (1 dec.), hvor de periodiske løsninger forsvinder, og gør rede for, hvilke konsekvenser det har for populationen, hvis jagten/fiskeriet overskrider denne værdi.

Koblede differentialligninger — rygtespredning

En fremmed kommer til en by med 10000 indbyggere og sætter et rygte igang. Hvordan vil rygtet spredes?

På ethvert tidspunkt under rygtespredningen vil der være tre slags personer tilstede i byen:

- *ignoranterne* — dem, som endnu ikke har hørt rygtet
- *sprederne* — dem, som har hørt rygtet og fortæller det videre til alle de møder
- *uinteresserede* — dem, som er tidligere spredere, men nu har mistet interessen i at sprede rygtet.

Antag, at så snart en spreder videregiver rygtet til en, der allerede har hørt rygtet, bliver vedkommende uinteresseret i at sprede rygtet.

Antage endvidere, at møder mellem alle tre persontyper finder sted helt tilfældigt. Betegn antal ignoranter med i, antal spredere med s og antal uinteresserede med u. Ændringer, der sker i i, s og u ved et møde mellem en spreder og en anden person, kan så beskrives:

- *En spreder møder en ignorant og videregiver rygtet:*

Totalt kan der arrageres $i \cdot s$ møder mellem en spreder og en ignorant. Hvis rygtet videregives ved et møde, vil der være en ignorant mindre og en spreder mere, altså $i \to i - 1,\ \ s \to s + 1$.

- *En spreder møder en spreder og prøver at videregive rygtet*

Totalt kan der arrageres $K(s,2) = ½ s \cdot (s - 1)$ møder mellem to spredere. Hvis rygtet forsøges videregivet ved et møde, vil der være to spredere mindre og to uinteresserede mere, altså $s \to s - 2,\ \ u \to u + 2$.

- *En spreder møder en uinteresseret og prøver at videregive rygtet*

Totalt kan der arrageres $u \cdot s$ møder mellem en spreder og en uinteresseret. Hvis rygtet forsøges videregivet ved et møde, vil der være en spreder mindre og en uinteresseret mere, altså $s \to s - 1,\ \ u \to u + 1$.

Rygtet kan kun spredes når en spreder møder en ignorant. Det vil derfor være rimeligt at antage, at den hastighed, hvormed rygtet spredes vil være proportional med antallet af møder mellem spredere og ignoranter.

Dette fører til differentialligningen

$$\frac{di}{dt} = -k \cdot i \cdot s$$

hvor $k > 0$ er en konstant. Minusset skyldes, at antallet af ignoranter er aftagende.

Antallet af spredere kan ændres på tre måder og hastigheden, hvormed dette sker, kan udtrykkes således

Læg mærke til, at det er det samme *k* der benyttes i alle led. Dette er en antagelse, der kun har til formål at simplificere modellen.

$$\frac{ds}{dt} = k \cdot i \cdot s - 2 \cdot k \cdot \tfrac{1}{2} s(s-1) - k \cdot s \cdot u$$

hvor der første led kommer fra møder mellem spredere og ignoranter, det andet led fra møder mellem spreder — 2-tallet skyldes at antallet af spreder reduceres med 2 ved den slags møder — og det tredje led fra møder mellem spredere og uinteresserede.
Da $i+s+u$ = 10001 (husk den fremmede), er u = $10001 - i - s$. Dette indsættes i differentialligningen ovenfor, der herefter reduceres til

$$\frac{ds}{dt} = k(2 \cdot i \cdot s - 10000s)$$

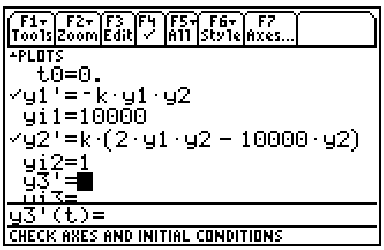
Dette giver følgende differentialligningssystem til beskrivelse af rygtespredningen

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = -k \cdot i \cdot s \\[2ex] \dfrac{ds}{dt} = k(2 \cdot i \cdot s - 10000s) \end{cases}$$

Indtast differentialligningerne i [Y=]-editoren:

Til at begynde med (tØ=Ø) er der 10000 ignoranter (yi1=1ØØØØ) og én spreder (yi2=1).

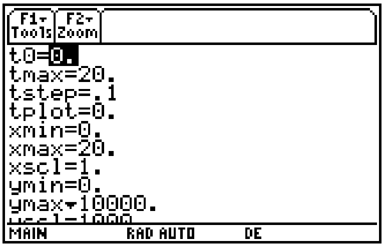
k skal tildeles værdien 0.0001 i hovedskærmen.

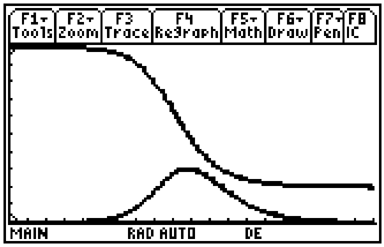


Inden graferne for y1 og y2 tegnes skal du lige sikre, at FLDOFF er valgt i Graph Formats og sikre, at der er valgt tidsakser ([F7] i [Y=]-editoren).

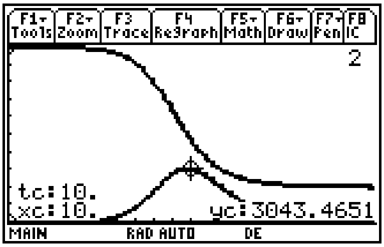
Desuden skal *k* have tildelt en værdi. Dette sker i hovedskærmen. Tildel her *k* værdien 0.0001: 0.0001[STO▸]k.

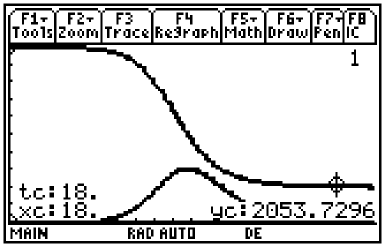
Dernæst skal vinduet indstilles, og grafen kan tegnes:



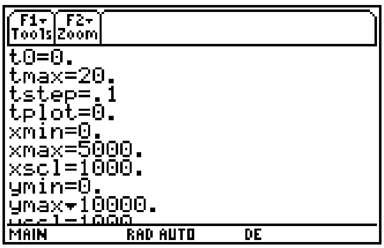


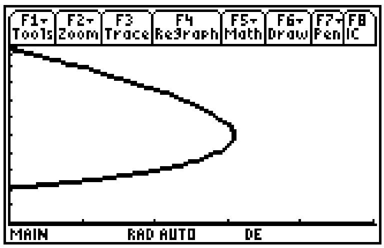
Begge kurver kan traces, og vi finder, at antallet af spredere topper til tidspunktet t = 10 og antallet af ignoranter nærmer sig asymptotisk til ca. 2000. Det betyder, at ca. 2000 personer aldrig hører rygtet.





Ved at vælge CUSTOM akser, kan man vise allehånde forskellige sammenhænge. Vælges y2 som x-akse og y1 som y-akse, vil vi få tegnet følgende:





Aktiviteter

1: En rov - byttedyr model

På en ø, hvor der er gulerødder nok, udsættes *x* kaniner og *y* ræve. Hvis der ingen ræve var tilstede, ville ændringen i kaninbestanden kunne beskrives ved differentialligningen

$$x' = a \cdot x, \quad a > 0$$

— dvs, en eksponentiel vækst. Var der ingen kaniner tilstede, ville ændringen i rævebestanden kunne beskrives ved

$$y' = -c \cdot y, \quad c > 0$$

— dvs, rævene vil uddø eksponentielt. Nu er der heldigvis både kaniner og ræve til stede. Tilstedeværelsen af ræve vil begrænse kaninbestandens vækst og tilstedeværelsen af kaniner vil sikre, at rævene ikke dør af sult.

Som model til beskrivelse af denne vekselvirkning opstillede Lotka og Volterra i 1925 følgende model:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot x \cdot y \\ \dfrac{dy}{dt} = -c \cdot y + d \cdot x \cdot y \end{cases}$$

hvor *a*, *b*, *c* og *d* er positive konstanter.

a) Forklar de enkelte led i differentialligningerne, idet $x \cdot y$ i analogi med rygtespredningsmodellen tolkes som det totale antal møder mellem ræve og kaniner.

b) Sæt $a = 0.5, b = 0.03, c = 0.5$ og $d = 0.01$, og antag der fra starten af er 50 kaniner og 10 ræve.
Indtast differentialligningerne med begyndelsesbetigelser i [Y=]-editoren og tegn de to løsningskurver i et passende vindue.
Eksperimenter med begyndelsesbetingelserne og værdierne af *a*, *b*, *c* og *d*.

c) Lav et billede, der har antal kaniner som x-akse og antal ræve som y-akse.

2: En epidemi model

Spedningen af en smitsom sygdom som fx røde hunde, hvor man blive immun for fremtidig smitte så snart man er kommet sig over sygdommen, kan beskrives ved differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -a \cdot r \cdot s \\ \dfrac{ds}{dt} = a \cdot r \cdot s - b \cdot s \end{cases}$$

hvor *r* er antallet af raske på dag *t* og *s* er antallet af syge på dag *t*.

a) Sammenlign modellen med rygtespredningsmodellen og forklar specielt betydningen af konstanterne *a* og *b*.

b) Sæt $a = 0.00002$ og $b = 0.1$, og lad begyndelsesbetingelserne være som rygtespredningsmodellen. Tegn løsningskurverne. Bliver alle smittet af sygdommen?

1. ordens differentialligninger — symbolsk løsning

Gennem en række typiske eksempler,vil du se, hvordan symbolsk løsning af en 1. ordens differentialligning foregår på TI-89 Titanium / Voyage 200:

Småkager bages ved 225º. Når de tages ud af ovnen, stilles de til afkøling i et 20º varmt rum. Lader vi $y(t)$ betegne småkagernes temperatur til tiden t, vil den hastighed, hvormed afkølingen sker, være bestemt ved differentialligningen:

$$y' = -k(y-20)$$

Løs differentialligningen og bestem konstanten k idet det oplyses, at temperaturen er faldet til 150º efter 1 minut.

Til symbolsk løsning af denne differentialligning skal du benytte værktøjet `deSolve` (der findes under F3 `Calc`).

Læg mærke til syntaksen i deSolve: Først indtastes ligningen, derefter den uafhængige variabel og til slut den variabel, der skal løses med hensyn til.

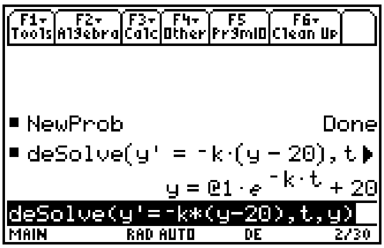
I den første skærmbillede nedenfor er ligningen løst uden bibetingelser af nogen art ved indtastningen:

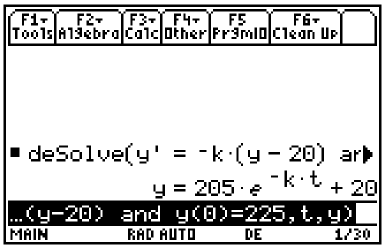
```
desolve(y'=-k*(y-20),t,y)
```

I det andet skærmbillede er tilføjet bibetingelsen `y(0)=225`.

```
desolve(y'=-k*(y-20) and y(0)=225,t,y)
```

@1 skal tolkes som en arbitrær konstant. Du kan få værdier fra @1 til @255. @1 er at opfatte som en variabel, dvs., at du fx kan løse ligninger mht. @1. NewProp vil nulstille @-tælleren.



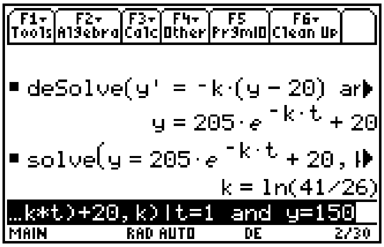


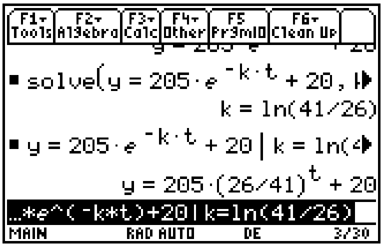
Ved at tilføje bibetingelsen direkte i `deSolve` slipper du altså for selv at skulle bestemme den arbitrære konstant `@1`, der optræder i løsningen uden bibetingelser.

Du mangler blot at bestemme k. Dette sker ved at indsætte $t = 1$ og $y = 150$ i ligningen $y = 205 \cdot e^{-k \cdot t} + 20$, og løse denne mht. k. Dette kan du klare i en indtastning:

```
solve(y=205*e^(-k*t)+20,k)|t=1 and y=150
```

Dette er gjort i skærmbilledet nedenfor til venstre. I det højre skærmbillede er den fundne værdi for k indsat i løsningen:





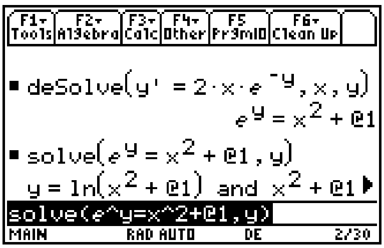
Så let går det dog langtfra altid. Ofte vil `deSolve` kun kun give løsningen y til differentialligningen implicit, hvorefter `solve` kan bruges til at isolere y — om alt går vel.

Løs differentialligningen

$$y' = 2x \cdot e^{-y}$$

med bibetingelserne hhv. $y(0) = 1$ og $y(1) = -1$.

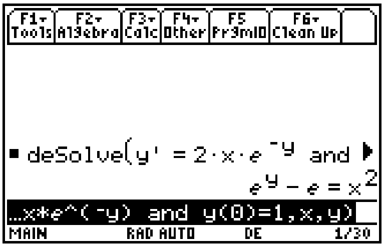
Som det ses af skærmbilledet nedenfor får du i dette tilfælde kun løsningen givet implicit som $e^y = x^2 + c$, hvor c er en konstant, og kun hvis du tvinger maskinen til det, regner den videre:

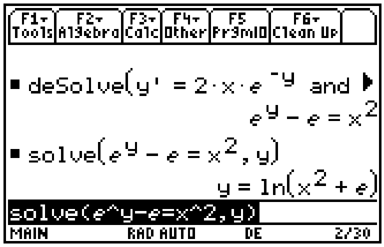


Du skal passe på med at stole blindt på grafregnerens bud på definitions-mængden.

Det er fastlæggelsen af definitionsmængden for løsningerne, som netop fører til undersøgelse af uligheden $x^2 + c > 0$, der giver anledning problemerne.

Tilføj nu bibetingelsen y(Ø)=1:

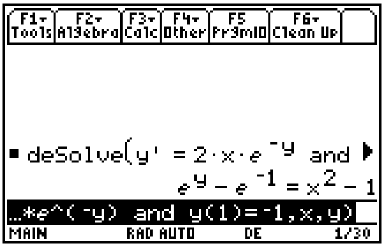


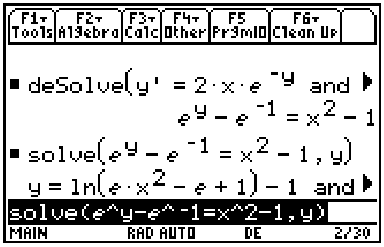


Næsten problemfrit.

Dog får du også her kun givet løsningen implicit selvom uligheden $x^2 + e > 0$ altid er opfyldt.

Ændrer du bibetingelsen til y(1)=-1, er situationen noget anderledes:

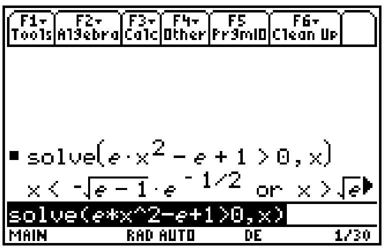




I skærmbilledet ovenfor til højre gemmer der sig en ulighed efter "and":

$$e \cdot x^2 - e + 1 \ > \ 0$$

Denne ulighed kan du nemt løse:

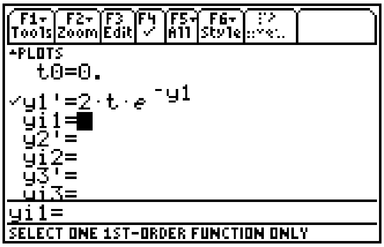


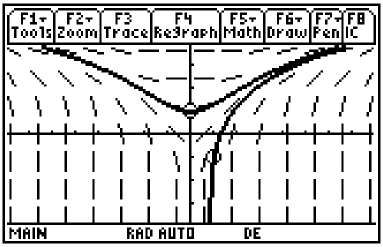
Løsningen ses at være:

$$x > \sqrt{e-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}} \;\vee\; x < -\sqrt{e-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

og definitionsmængden bliver således $Dm(y) = \left]\sqrt{e-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}}, \infty\right[$.

Selvom differentialligningen er løst symbolsk, kan et kig på linjeelementerne være nyttigt.
Nedenfor er de to løsningskurver svarende til `y(0)=1` og `y(-1)=1` indtegnet sammen med linjeelementer (`SLPFLD`):





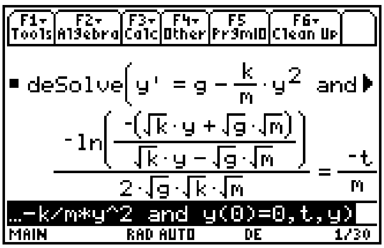
Faldskærmsudspring

Løs differentialligningen

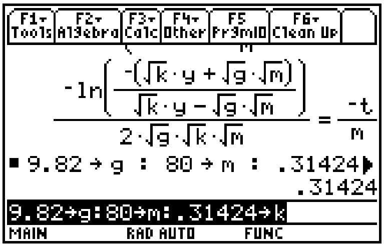
$$y' = g - \frac{k}{m}\cdot y^2$$

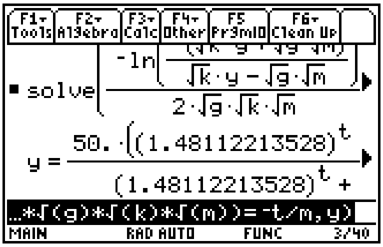
med begyndelsesbetingelsen $y(0) = 0$, hvor $g = 9.82$, $m = 80$ og $k = 0.31424$.

Indtast og løs differentialligningen som vist:



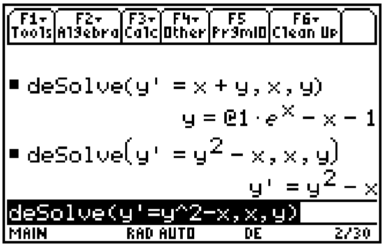
Også her får du kun løsningen bestemt implicit. Du skal så selv bestemme y med solve, men inden du gør dette, er det en god ide at tildele værdier til g, m og k:





Løsningen fortsætter til højre for pilen i venstre skærmbillede ovenfor, men der er ingen betingelser på løsningen.

Maskinen kan løse ganske mange differentialligninger af 1. orden — selv en ikke helt simpel differentialligning som $y' = x + y$ går som en leg, men i mange tilfælde må maskinen også give op



Maskinen viser sin overgivelse ved at returnere den oprindelige ligning. Det betyder ikke, at der ingen løsninger er — der er masser, som du allerede har set. Selvom differentialligningen ser yderst simpel ud, så er det alligevel ikke muligt at udtrykke løsningerne vha. simple funktioner eller integraler af disse. Denne kendsgerning er ikke noget man blot har erfaret — det kan faktisk bevises!

Aktiviteter

1: De hyperbolske funktioner

Funktionerne *hyperbolsk cosinus* og *hyperbolsk sinus* er for alle $x \in$ R defineret ved

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{og} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Funktionerne er på TI-89 Titanium / Voyage 200 under de samme navne.

a) Tegn graferne for sinh og cosh. Læg mærke til, at for store værdier af *x* er cosh og sinh stort se sammenfaldende. Argumenter for dette udfra de to forskrifter.

b) Vis, at sinh og cosh er differentiable med differentialkvotienterne

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \qquad \text{og} \qquad \sinh'(x) = \cosh(x)$$

c) Vis, at for ethvert $x \in$ R, er $(\cosh(x), \sinh(x))$ et punkt på hyperblen med ligningen $x^2 - y^2 = 1$, dvs.:

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

d) Vis, at for alle $x \in$ R er

$$\sinh'(x) = \sqrt{1 + \sinh(x)^2}$$

og oversæt dette til et udsagn om løsninger til differentialligningen

$$y' = \sqrt{1 + y^2}$$

d) Vis, at for alle $x \geq 0$ er

$$\cosh'(x) = \sqrt{\cosh(x)^2 - 1}$$

og oversæt dette til et udsagn om løsninger til differentialligningen

$$y' = \sqrt{y^2 - 1}$$

e) Funktionen *hyperbolsk tangens* er for alle $x \in \mathrm{R}$ defineret ved

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Tegn grafen for tanh og vis ved differentiation af tanh, at tanh er løsning til differentialligningen:

$$y' = 1 - y^2$$

2. ordens differentialligninger — symbolsk løsning

Gennem en række typiske eksempler,vil du se, hvordan symbolsk løsning af en 1. ordens differentialligning foregår på TI-89 Titanium / Voyage 200:

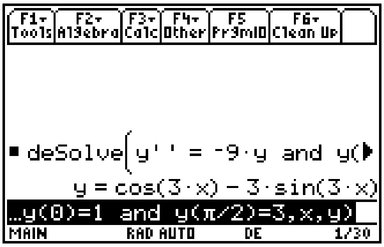
Løs differentialligningen

$$y'' = -9y$$

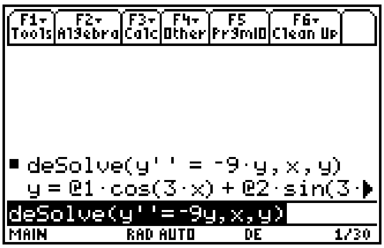
og bestem den løsning, der

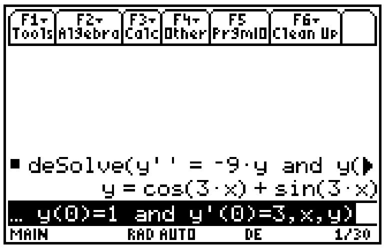
1) går gennem linjeelementet $(0,1;3)$
2) går gennem punkterne $(0,1)$ og $(\pi/2,3)$
3) opfylder, at $y'(\pi/2) = 3$ og $y'(0) = 1$

Løser du differentialligningen uden bibetingelser af nogen art, får du:



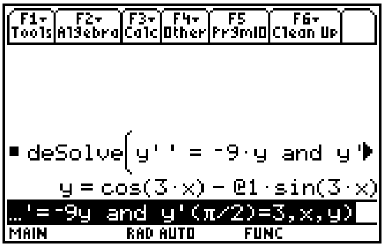
Med bibetingelserne `y(0)=1` og `y'(0)=3`, får du første skærmbilledenedenfor og med randbetingelserne `y(0)=1` og `y(π/2)=3`, det andet:

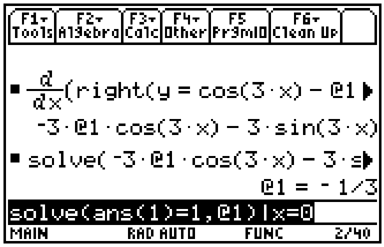




Ved at tilføje betingelserne direkte i `deSolve` slipper du altså for selv at skulle bestemme de arbitrære konstanter `@1` og `@2`, der optræder i løsningen uden bibetingelser.

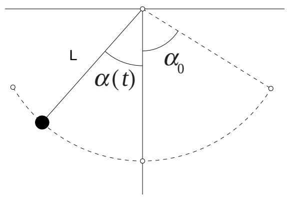
Så simpelt går det ikke i det tredje tilfælde. TI-89/Voyage 200 vil ikke acceptere to hældninger som som betingelse, så i første omgang må du nøjes med at tilføje den første.
Herefter må du differentiere løsningen y, og løse ligningen $y'(0) = 1$ med hensyn til @1:





Eksempel : det matematiske pendul

Et matematisk pendul består af et lod med massen m ophængt i en masseløs snor med længden L.



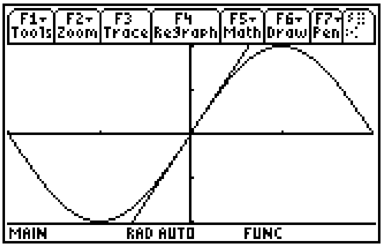
Loddet slippes fra hvile med et startudsving på α_0. Man kan vise, at udslagsvinklen α som funktion af tiden tilfredsstiller differentialligningen:

$$\alpha'' = -\frac{g}{L}\sin(\alpha)$$

med bibetingelserne $\alpha(0) = \alpha_0$ og $\alpha'(0) = 0$.

Denne differentialligning kan ikke løses symbolsk, men for små vinkler kan man lave en god tilnærmelse:

På skærmbilledet nedenfor er indtegnet grafen for $\sin(x)$ sammen med dens tangent $y = x$ i punktet $(0,0)$:



Da tangenten og grafen stort set er sammenfaldende i en omegn omkring 0, vil sin(x) ≈ x i denne omegn, hvor x måles i radianer. I praksis skal vinklen blot være mindre end ca. 15º.

Med denne tilnærmelse simplificeres differentialligningen til

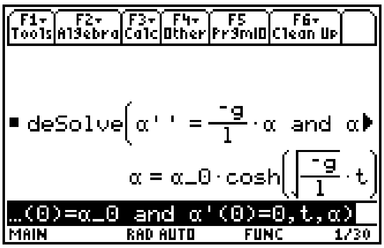
$$\alpha'' = -\frac{g}{L}\alpha$$

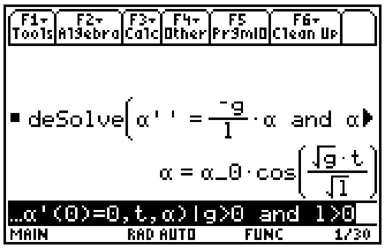
med bibetingelserne $\alpha(0) = \alpha_0$ og $\alpha'(0) = 0$..

Denne er lige til at løse, omend der er overraskelser undervejs. Ved blot at taste ligningen ind med bibetingelser, får du løsningen udtrykt ved hyperbolsk cosinus. Dette kan du undgå ved eksplicit at gøre opmærksom på, at såvel g som L er positive tal ved at tilføje betingelsen

|g>Ø and L>Ø

Tip!
Et α (og andre græske bogstaver) skriver du ved at taste [CHAR] og vælge 1:Greek.





Perioden i denne harmoniske svingning kan findes ved at løse ligningen

$$\frac{\sqrt{g}\cdot t}{\sqrt{L}} = 2\pi$$

hvorved du finder formlen for svingningstiden for et matematisk pendul (med små udsving):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

I næste afsnit skal du løse den generelle differentialligning numerisk.

2. ordens differentialligninger — numerisk løsning

Numerisk løsning af en 2. ordens differentialligning foregår ved at omforme ligningen til to koblede differentialligninger af 1. orden. Generelt er proceduren denne:

Differentialligningen af 2. orden

$$y'' = f(x, y, y')$$

omformes til et system af to koblede differentialligninger af 1. orden ved

$$\begin{cases} y1' = y2 \\ y2' = f(t, y1, y2) \end{cases}$$

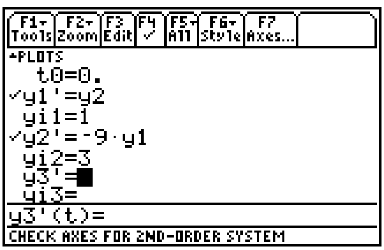
Løs differentialligningen

$$y'' = -9y$$

og tegn den løsningskurve, der går gennem linjeelementet $(0,1;3)$.

Vi omformer til et system af to koblede differentialligninger af 1. orden og indtaster i [Y=]-editoren:

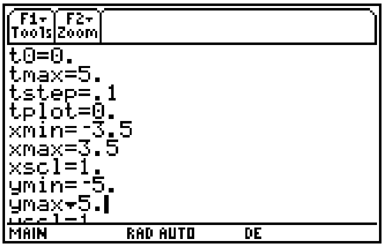
Hvis du undlader at indtaste begyndelsesbetingelserne, tegnes kun DIR FIELD.

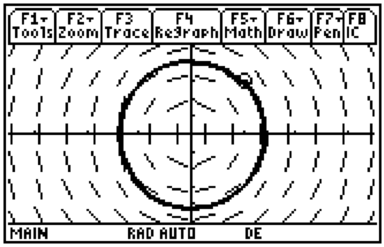


Tast [F1] `9` for at åbne `Graph Formats` menuen. Her skal indstillingen i `Fields` være `2:DIRFLD`.

Tilbage er blot at indstille vinduet fornuftigt og tegne grafen:

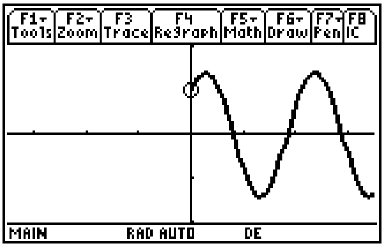
Løsningskurven kan Traces, da begyndelsesbetingelserne er indtastede i [Y=]-editoren. Flere løsningskurver kan tegnes vha. [F8] IC.





Læg mærke til, at det, du har fået tegnet, er et faseplot med `y1` afsat på 1. aksen og `y2` på 2. aksen.

For at se løsningskurven y, skal du vælge `FldOff` i `FORMAT`. Tast [F7] i [Y=]-editoren og vælg `CUSTOM` akser med `t` som `X Axis` og `y1` som `Y-Axis`.



Det interaktive værktøj [F8] `IC` virker også her. Prøv! Dog er det kun punktet, løsningskurven skal gå igennem, der kan vælges interaktivt — hældningen i punktet kan af gode grunde ikke.

Eksempel : det matematiske pendul (numerisk)

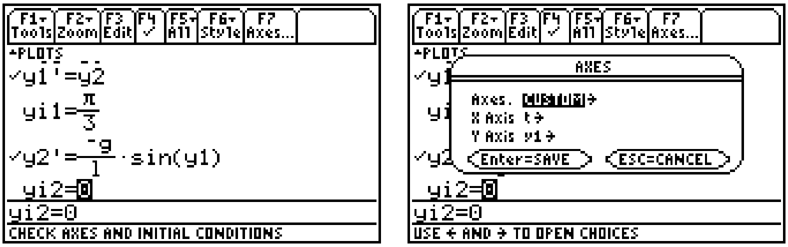
Du skal nu lave en numerisk løsning af differentialligningen

$$\alpha'' = -\frac{g}{L}\sin(\alpha)$$

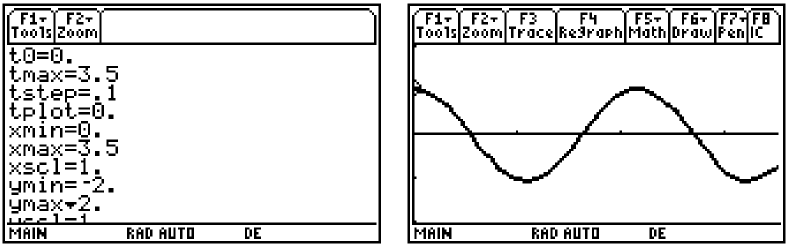
med bibetingelserne $\alpha(0) = \alpha_0$ og $\alpha'(0) = 0$, og sammenligne med den løsning du fandt gældende for små vinkler.

Start med at tildele værdierne: `9.82→g:1→L` i hovedskærmen. I [Y=]-editoren sættes startudsvinget til `π/3`.

Differentialligningen omformes til et system af to koblede differentialligninger, der indtastes i [Y=]-editoren:



Akseindstillingen skal være `COSTUM` med `t` på X-aksen og `y1` på Y-aksen. Vinduet indstilles som vist nedenfor til højre:



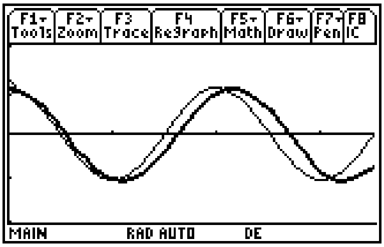
For små vinkler gælder tilnærmelsen (med g = 9.82 og L = 1):

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right)$$

Du kan ikke placere denne løsning i [Y=]-editoren med den indstilling maskinen har nu, og ændrer du indstillingen, ser du ikke længere grafen for den numeriske løsning. I stedet kan du tegne direkte fra hovedskærmen med kommandoen:

```
DrawFunc π/3*cos(√(g/L)*x)
```

som du finder i [F6] `Draw`.



Som forventet stemmer de to kurver overens for små vinkler, men øges startudsvinget, bliver fejlen større og større.

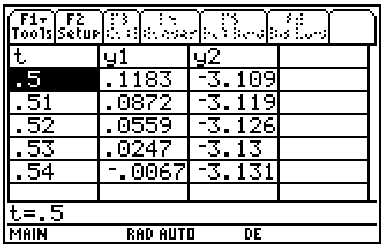
Svingningstiden (perioden) for den tilnærmede løsning kan bestemmes vha. formlen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9.82}} = 2.005$$

For at bestemme svingningstiden for den numeriske løsning, må du arbejde lidt mere. Svingningstiden kan fx bestemmes som den dobbelte afstand mellem to på hinanden følgende skæringspunkter med x-aksen, men desværre virker nulpunktsværktøjet (`Zero`) ikke i `DE`-indstillingen.

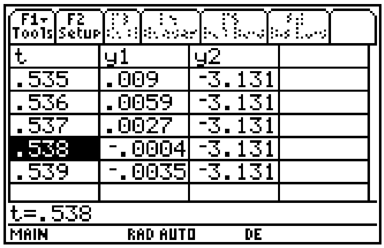
Vha. Trace kan du se, at det første nulpunkt ligger omkring 0.5. Dette kan så benyttes som udgangspunkt i en tabel over y1:

Tast [TblSet], sæt `tblStart=Ø.5` og `Δtbl=Ø.Ø1`. Tabellen fremstilles ved at taste [TABLE]:



t	y1	y2
.5	.1183	-3.109
.51	.0872	-3.119
.52	.0559	-3.126
.53	.0247	-3.13
.54	-.0067	-3.131

t=.5



t	y1	y2
.535	.009	-3.131
.536	.0059	-3.131
.537	.0027	-3.131
.538	-.0004	-3.131
.539	-.0035	-3.131

t=.538

Af tabellen ser vi, at nulpunktet ligger mellem 0.53 og 0.54. Gå tilbage til [TblSet], sæt `tblStart=Ø.53` og `Δtbl=Ø.ØØ1`. Etc. Fortsættes således, kan den ønskede nøjagtighed opnås.

Med 3 decimaler bliver de to første nulpunkter: 0.538 og 1.614. Svingningstiden bliver dermed $2\cdot(1.614 - 0.538) = 2.157$, hvilket giver ca. 6.8% i relativ fejl for et startudsving på 60°.

Aktiviteter

1: Standselængde for en bil

En bil kører hen ad en landevej og sættes pludselig i frigear. Hvor langt et stykke tilbagelægger bilen før den standser?
Der forudsættes, at landevejen er plan og uden krumninger, samt at det er vindstille. Bilens standselængde bestemmes da af rullemodstanden og luftmodstanden.

Rullemodstanden er proportional med bilens tyngde:

$$F_{rulle} = -b \cdot m \cdot g$$

hvor m er bilens masse, g er tyngdeaccelerationen og b er en konstant, der erfaringsmæssigt sættes til $b = 0.002$ for hastigheder mindre end 130 km/h.

Luftmodstanden er proportional med kvadratet på hastigheden:

$$F_{luft} = -\tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_w \cdot A \cdot v^2$$

hvor ρ er luftens massefylde, c_w er bilens formfaktor, mens A er bilens maksimale tværsnitsareal målt vinkelret på bevægelsesretningen. Formmodstanden er et dimensionsløst tal, som her kan regnes for at være konstant.

Hvis $s(t)$ betegner den tilbagelagte vej, målt fra det sted, hvor bilen blev sat i frigear, gælder kraftligningen:

$$m \cdot s'' = -b \cdot m \cdot g - \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_w \cdot A \cdot (s')^2$$

der kan omskrives til

$$s'' = -b \cdot g - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot c_w \cdot A}{m} \cdot (s')^2$$

Løs ligningen numerisk med følgende værdier af konstanterne:

$$\begin{array}{ll} m = 1200 \text{ kg} & A = 2.3 \text{ m}^2 \\ g = 9.8 \text{ m/s}^2 & c_w = 0.35 \\ v_0 = 80 \text{ km/h} & \rho = 1.2 \text{ kg/m}^3 \end{array}$$

Hvor langt kører bilen?